МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

Н. М. Близняков

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Учебно-методическое пособие для вузов

Издательско-полиграфический центр
Воронежского государственного университета
2013

Утверждено научно-методическим советом математического факультета 31 января 2013 г., протокол № 0500-01

Рецензент д-р физ.-мат. наук Ю. И. Сапронов

Учебно-методическое пособие подготовлено на кафедре алгебры и топологических методов анализа математического факультета Воронежского государственного университета.

Рекомендуется для студентов 1-го курса математического факультета Воронежского государственного университета.

Для направлений: 010100 — Математика; 010200 — Математика и компьютерные науки
Для специальности: 010701 — Фундаментальная математика и механика

§1. Поле комплексных чисел

При решении различных задач возникает потребность расширения запаса чисел. Так, для решения уравнения $x+1=0$ недостаточно натуральных чисел, для решения уравнения $2x-1=0$ недостаточно целых чисел, для решения уравнения $x^2-2=0$ недостаточно рациональных чисел. Расширяя систему $\mathbb{N}$ натуральных чисел, мы приходим к системам $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ целых, рациональных и действительных чисел. Для решения некоторых задач недостаточно и действительных чисел. Например, уравнение

$$x^2+1=0 \tag{1}$$

не имеет решения в поле $\mathbb{R}$ действительных чисел. Построим систему чисел, в которой уравнение (1) имеет решение. В качестве исходного материала для построения новой системы чисел используем упорядоченные пары действительных чисел.

1. Система комплексных чисел. Рассмотрим множество всех упорядоченных пар действительных чисел. Две пары (a,b), (c,d) считают равными и пишут $(a,b)=(c,d)$, если $a=c$, $b=d$.

Определение 1. Множество всех упорядоченных пар действительных чисел с заданными на нем операциями сложения и умножения пар

$$
\begin{aligned}
&1)\ (a,b)+(c,d)=(a+c,b+d),\\
&2)\ (a,b)(c,d)=(ac-bd,ad+bc)
\end{aligned}
$$

называется *системой ко́мплексных чисел* и обозначается $\mathbb{C}$.

Элементы из $\mathbb{C}$ называются *комплексными числами*.

Отметим, что операция сложения в $\mathbb{C}$ такая же, как в пространстве $\mathbb{R}^2$. Менее понятен выбор операции умножения, её естественность станет видна при изучении $\mathbb{C}$.

Правила действий с комплексными числами аналогичны правилам действий с действительными числами.

Теорема 1. Система комплексных чисел $\mathbb{C}$ является полем.

Доказательство. Операции сложения и умножения комплексных чисел ассоциативны и коммутативны:

$$
\begin{aligned}
&((a,b)+(c,d))+(e,f)=(a,b)+((c,d)+(e,f)),\\
&(a,b)+(c,d)=(c,d)+(a,b),\\
&((a,b)(c,d))(e,f)=(a,b)((c,d)(e,f)),\\
&(a,b)(c,d)=(c,d)(a,b).
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Действительно, выполняя действия в правых и левых частях равенств (2) и сравнивая результаты, получим тождества.

Аналогичным образом, имеет место дистрибутивность

$$((a,b)+(c,d))(e,f)=(a,b)(e,f)+(c,d)(e,f).$$

Нулевым элементом в $\mathbb{C}$, очевидно, является комплексное число $(0,0)$:

$$(a,b)+(0,0)=(a,b),$$

а противоположным элементом к (a,b) – комплексное число $(-a,-b)$:

$$(a,b)+(-a,-b)=(0,0).$$

Единичный элемент определяется из уравнения

$$(a,b)(x,y)=(a,b). \tag{3}$$

Выполняя действия в левой части равенства (3) и сравнивая результат с правой частью, получим систему уравнений

$$\begin{cases} ax-by=a, \\ bx+ay=b, \end{cases}$$

откуда $x=1,\ y=0$. Таким образом, комплексное число $(1,0)$ является единичным элементом в $\mathbb{C}$.

Обратный элемент к $(a,b),\ (a,b)\neq(0,0)$ определяется из уравнения

$$(a,b)(x,y)=(1,0),$$

эквивалентного системе уравнений

$$\begin{cases} ax-by=1, \\ bx+ay=0, \end{cases}$$

откуда $x=a/(a^2+b^2),\ y=-b/(a^2+b^2)$. Следовательно,

$$(a,b)^{-1}=(\frac{a}{a^2+b^2},\ \ \frac{-b}{a^2+b^2}).$$

$\blacksquare$

З а м е ч а н и е 1. Метод построения поля $\mathbb{C}$ из элементов множества $\mathbb{R}^2$ упорядоченных пар действительных чисел не допускает обобщения на множества $\mathbb{R}^n$ упорядоченных наборов n действительных чисел при $n > 2$. Точнее, справедливо следующее утверждение: на $\mathbb{R}^n$, $n > 2$ нельзя определить операции сложения и умножения элементов, с которыми $\mathbb{R}^n$ было бы полем. Однако, на $\mathbb{R}^4$ можно определить операции сложения и умножения элементов так, что будут выполнены все аксиомы поля, к р о м е к о м м у т а т и в н о с т и у м н о ж е н и я; получающийся при этом алгебраический объект называется *системой кватернионов* и обозначается $\mathbb{H}$. Система кватернионов $\mathbb{H}$ строится по полю $\mathbb{C}$ по тому же «принципу удвоения», по которому система комплексных чисел строилась по полю $\mathbb{R}$. На множестве $\mathbb{H} = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ упорядоченных пар комплексных чисел определим операцию сложения так же покомпонентно:

$$(\alpha, \beta) + (\gamma, \delta) \stackrel{def}{=} (\alpha + \gamma, \beta + \delta),$$

а операцию умножения модифицируем, учитывая возможность сопряжения в $\mathbb{C}$:

$$(\alpha, \beta) \cdot (\gamma, \delta) \stackrel{def}{=} (\alpha\gamma - \beta\overline{\delta}, \alpha\delta + \beta\overline{\gamma}).$$

Кольцо $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ не удовлетворяет только одному условию поля: коммутативности умножения (такого типа кольца называются *телами*). Если теперь применить «принцип удвоения» к телу $\mathbb{H}$, то получится кольцо, называемое *системой октав* или *системой чисел Кэли*. В кольце октав не выполнены уже два условия поля: коммутативность и ассоциативность умножения. Если «принцип удвоения» применить к кольцу октав, то в результате получится кольцо, в котором не все ненулевые элементы обратимы (см. [6]).

2. Вычитание и деление комплексных чисел. Операции, обратные к сложению и умножению комплексных чисел, называют, как обычно, вычитанием и делением и используют для них привычные обозначения.

Приведем выражения разности и частного комплексных чисел:

$$(a,b)-(c,d)\overset{def}{=}(a,b)+(-(c,d))=(a,b)+(-c,-d)=\\=(a-c,b-d);$$

если $(c,d)\neq(0,0)$, то

$$\frac{(a,b)}{(c,d)}\overset{def}{=}(a,b)(c,d)^{-1}=(a,b)\left(\frac{c}{c^2+d^2},\ \frac{-d}{c^2+d^2}\right)=\\=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\ \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right).$$

3. Алгебраическая форма комплексного числа. Рассмотрим комплексные числа вида $(a,0)$. Такие комплексные числа очень похожи на действительные числа, правила действий с ними такие же, как с действительными числами:

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0),$$
$$(a, 0)(b, 0) = (ab, 0).$$

Нетрудно видеть, что множество комплексных чисел вида $(a, 0)$ является подполем поля $\mathbb{C}$, изоморфным полю $\mathbb{R}$ действительных чисел; изоморфизмом здесь может служить проекция: $pr(a, 0) = a$. Учитывая соглашение о неразличении изоморфных объектов, комплексное число $(a, 0)$ естественно отождествлять с действительным числом a и для упрощения записи обозначать одной буквой a, т. е. $(a, 0) \stackrel{des}{=} a$. Комплексное число $(0, 1)$ обозначим символом i, оно обладает замечательным свойством $i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0)$, его называют *мнимой единицей*. При сделанных обозначениях комплексное число вида $(0, b)$ можно записать следующим образом: $(0, b) = (b, 0)(0, 1) = b\,i$. Тогда всякое комплексное число (a, b) можно представить в виде: $(a, b) = (a, 0)+(0, b) = a+b\,i$. Такая форма записи комплексного числа (a, b) называется его *алгебраической формой*. Для комплексного числа $\alpha = a+b\,i$ действительное число a называется *действительной частью* числа α и обозначается $Re\,\alpha$, а действительное число b называется *мнимой частью* числа α и обозначается $Im\,\alpha$. Алгебраическая форма удобна при выполнении действий с комплексными числами, поскольку в этом случае действия с комплексными числами выполняются по обычным правилам действий с алгебраическими выражениями с учетом условия

$i^2 = -1$:

$$\begin{aligned}
&(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i,\\
&(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i,\\
&(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i,\\
&\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\,i.
\end{aligned}$$

Отметим, что в построенном поле $\mathbb{C}$ уравнение (1) имеет решения: i, $-i$.

З а м е ч а н и е 2. Так как множество всех комплексных чисел вида $(a, 0)$ является подполем поля $\mathbb{C}$, изоморфным полю $\mathbb{R}$ действительных чисел, то построенное поле $\mathbb{C}$ можно рассматривать как расширение поля $\mathbb{R}$. Возникает естественный вопрос: можно ли построить другие расширения поля $\mathbb{R}$, в которых уравнение $x^2+1=0$ имеет решения, т. е. в которых существует элемент j такой, что $j^2 = -1$? Оказывается, что, при естественном условии минимальности расширения, построенное поле $\mathbb{C}$ единственно с точностью до изоморфизма, переводящего все действительные числа в себя. Точнее, расширение P поля $\mathbb{R}$ называется минимальным, если для всякого поля P' такого, что $\mathbb{R} \subset P' \subset P$, либо $P' = \mathbb{R}$, либо $P' = P$. Указанная единственность расширения теперь может быть описана следующим образом. Если P – минимальное расширение поля $\mathbb{R}$, в котором уравнение $x^2+1=0$ имеет решение j, то существует изоморфизм

$f : \mathbb{C} \to P$ такой, что $f|_{\mathbb{R}} = I_{\mathbb{R}}$ (т. е. $f(\alpha) = \alpha$ для всякого $\alpha \in \mathbb{R}$) и $f(i) = j$. Таким образом, все расширения поля $\mathbb{R}$ указанного вида представляют собой различные модели поля комплексных чисел $\mathbb{C}$ (см. [5]).

Упражнение 1. Покажите, что множество всех матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, где $a, b \in \mathbb{R}$, с операциями сложения и умножения матриц является полем, изоморфным полю комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Упражнения

1. Вычислите
$$\frac{(1+2i)(3-4i)}{(-5+6i)}.$$

2. Решите систему линейных уравнений
$$\begin{cases} z_1 + iz_2 - 2z_3 = 10, \\ z_1 - z_2 + 2iz_3 = 20, \\ iz_1 + 3iz_2 - (1+i)z_3 = 30. \end{cases}$$

3. Покажите, что множество всех матриц вида $\begin{pmatrix} \alpha & \overline{\beta} \\ -\beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix}$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, с операциями сложения и умножения матриц является телом, изоморфным телу кватернионов $\mathbb{H}$.

§2. Геометрическая интерпретация комплексных чисел

1. Геометрическое изображение комплексных чисел. Действительные числа при их геометрической интерпретации изображают точками числовой прямой. Комплексные числа изображают точками плоскости. Выберем на плоскости декартову прямоугольную систему координат. Комплексное число $(a, b) = a + bi$ естественно изобразить точкой плоскости с координатами a, b (рис. 1).

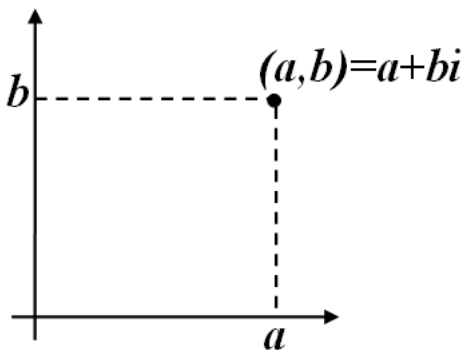

Рис. 1

Таким образом устанавливается биективное соответствие между множеством всех комплексных чисел и множеством всех точек плоскости. Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется *комплексной плоскостью.* Комплексные числа вида $(a, 0)$, отождествляемые нами с действительными числами, изображаются точками оси абсцисс, называемой *действительной осью* комплексной плоскости. Комплексные числа вида $(0, b)$, называемые *чисто мнимыми*, изображаются точками оси ординат, называемой *мнимой осью* комплексной плоскости.

Комплексные числа изображают также векторами на плоскости, сопоставляя каждому комплексному числу α вектор с началом в начале координат и с концом в точке плоскости, изображающей число α (т. е. радиус-вектор этой точки). Такое изображение удобно для геометрической интерпретации сложения и вычитания комплексных чисел. Легко видеть, что вектор, изображающий комплексное число $\alpha + \beta$, является суммой векторов, изображающих числа α и β (рис. 2), а вектор, изображающий число $\alpha - \beta$, является разностью векторов, изображающих числа α и β (рис. 3).

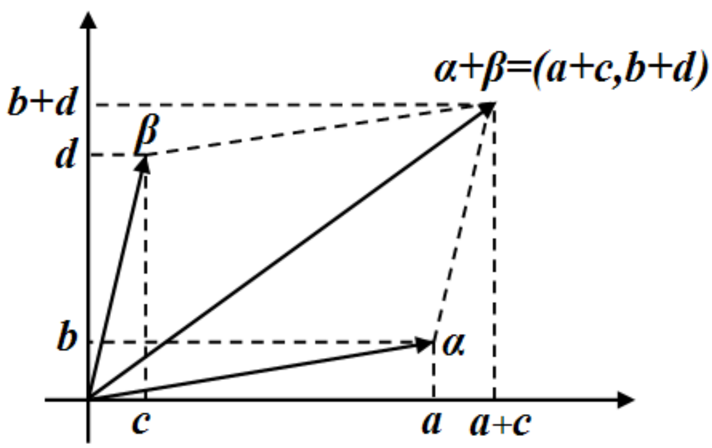

Рис. 2

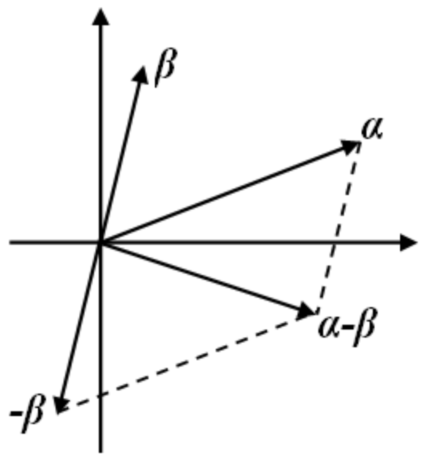

Рис. 3

Геометрическая интерпретация операций умножения и деления комплексных чисел станет возможной после того, как мы укажем еще одну форму записи комплексных чисел.

2. Модуль и аргумент комплексного числа. Комплексное число $\alpha = (a, b) = a + bi$ мы изображаем точкой $M(a, b)$ комплексной плоскости с координатами $a,\ b$. Положение точки M вполне определяется её полярными координатами r, φ: длиной r радиус-вектора точки M и величиной угла φ между положительным направлением действительной оси и радиус-вектором точки M (если точка M совпадает с началом координат, то величина φ неопределённа, т. е. может быть равна любому действительному числу). Поскольку угол можно отсчитывать многими способами, то величина φ определена лишь с точностью до слагаемых вида $2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ (рис. 4).

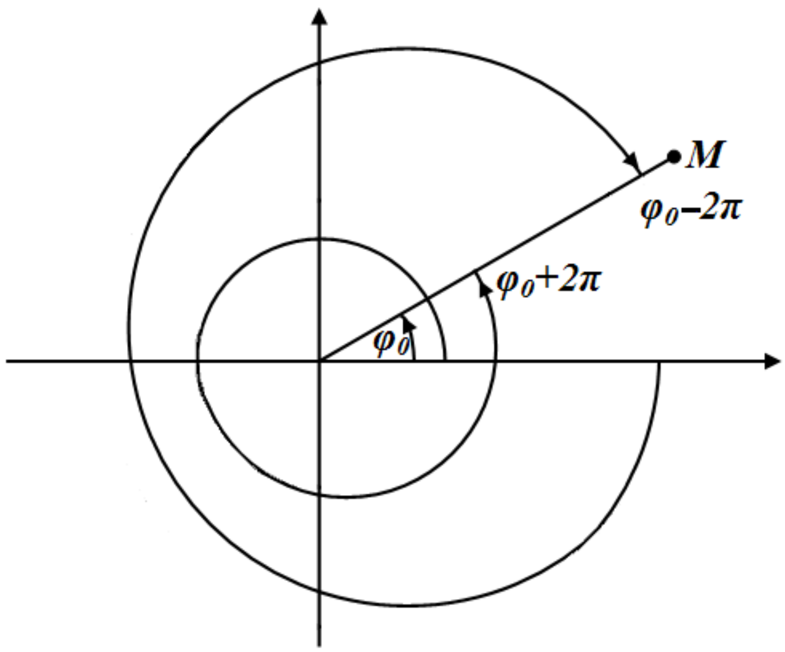

Рис. 4

Число r называется *модулем* комплексного числа α и обозначается $|\alpha|$, а величина φ называется *аргументом* комплексного числа α и обозначается $arg\,\alpha$.

Таким образом, аргумент определен неоднозначно. В дальнейшем, говоря об аргументе комплексного числа, мы будем подразумевать какое-нибудь одно его значение, безразлично какое.

Ясно, что два отличных от нуля комплексных числа равны тогда и только тогда, когда их модули совпадают, а аргументы отличаются на $2k\pi$.

Отметим, что для модуля комплексного числа $\alpha = a + bi$ справедливо равенство

$$|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

а аргумент ненулевого числа α с точностью до $2k\pi$ определяется формулой

$$arg\,\alpha = \begin{cases} arctg\dfrac{b}{a} + \pi(1 - sgn\,a), & \text{при } a \neq 0; \\ \dfrac{\pi}{2} sgn\,b, & \text{при } a = 0. \end{cases}$$

З а м е ч а н и е 1. Многозначности при определении понятия аргумента легко можно было бы избежать, ограничившись каким-нибудь одним значением аргумента (например, из полуинтервала $[0, 2\pi)$). Однако, такое ограничение оказывается неудобным при дальнейшем изучении комплексных чисел, особенно в теории функций комплексного переменного.

3. Неравенства для модуля суммы и разности комплексных чисел. Для комплексных чисел нельзя разумно определить понятия «больше» и «меньше», поскольку изображения комплексных чисел, в отличие от действительных чисел, располагаются не на прямой, точки которой упорядочены естественным образом, а на плоскости, точки которой не имеют естественной упорядоченности. Однако, можно говорить о неравенствах модулей комплексных чисел, так как модули комплексных чисел – действительные числа. Неравенства для модулей комплексных чисел аналогичны неравенствам для модулей действительных чисел.

Т е о р е м а 1. Для любых комплексных чисел α, β справедливы неравенства:

$$|\alpha| - |\beta| \leq ||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha \pm \beta| \leq |\alpha| + |\beta| \tag{1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим два случая. Пусть сначала векторы, изображаюшие комплексные числа α и β, не лежат на одной прямой. Тогда комплексное число $\alpha + \beta$ изображается диагональю параллелограмма со сторонами длины $|\alpha|$ и $|\beta|$ (рис. 5).

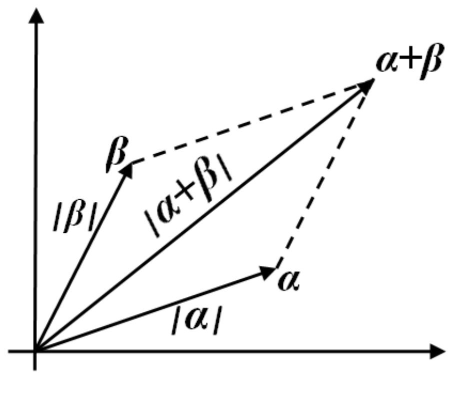

Рис. 5

В силу теоремы элементарной геометрии о сторонах треугольника (длина стороны треугольника меньше суммы длин двух других сторон) имеем

$$|\beta| - |\alpha|,\ |\alpha| - |\beta| < |\alpha + \beta| < |\alpha| + |\beta|,$$

откуда

$$|\alpha| - |\beta| < ||\alpha| - |\beta|| < |\alpha + \beta| < |\alpha| + |\beta|,$$

что и доказывает неравенства (1) в данном случае.

Если же векторы, изображающие числа α и β, лежат на одной прямой, т. е. пропорциональны, то неравенства (1) следуют из аналогичных неравенств для действительных чисел. Действительно, пусть для определенности, $\beta = r\alpha,\ r \in \mathbb{R}$. Тогда

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & & |\alpha+\beta| & & \\
 & & & & \| & & \\
(|1|-|r|)|\alpha| & \le & ||r|-|1||\cdot|\alpha| & \le & |r+1|\cdot|\alpha| & \le & (|r|+|1|)|\alpha| \\
\| & & \| & & & & \| \\
|\alpha|-|\beta| & & ||\alpha|-|\beta|| & & & & |\alpha|+|\beta|
\end{array}
$$

Неравенства (1) для случая $|\alpha + \beta|$ полностью доказаны. Заменяя в неравенствах (1) β на $-\beta$ и учитывая, что $|-\beta| = |\beta|$, получаем неравенства (1) для случая $|\alpha - \beta|$.

$\blacksquare$

4. Сопряженные числа.

О п р е д е л е н и е 1. Пусть $\alpha = a + bi$ – некоторое комплексное число. Число $a - bi$ называется *числом, сопряжённым* с α и обозначается $\overline{\alpha}$.

Числом, сопряженным с $\overline{\alpha}$, будет, очевидно, α, т. е. $\overline{\overline{\alpha}} = \alpha$. Таким образом, можно говорить о паре взаимно сопряженных чисел. Ясно, что действительные числа (и только они) сопряжены сами себе.

Точки комплексной плоскости, изображающие сопряженные числа, симметричны относительно действительной оси (рис. 6).

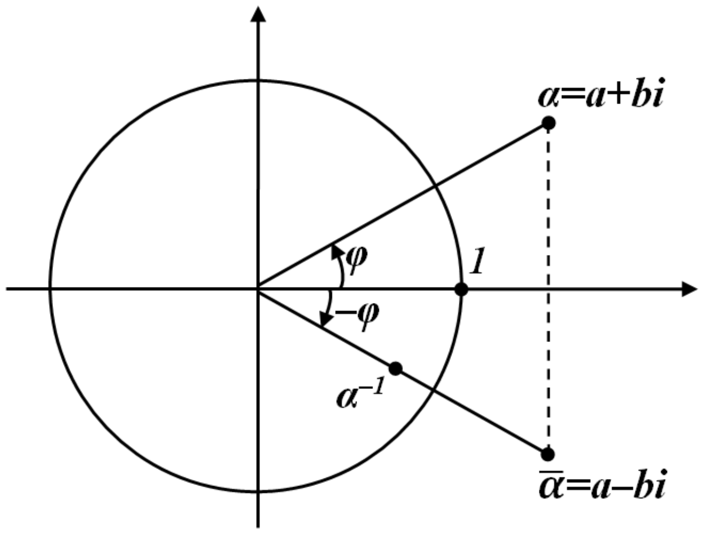

Рис. 6

Поэтому $|\overline{\alpha}| = |\alpha|,\ arg\,\overline{\alpha} = -arg\,\alpha$.

Следующая теорема характеризует важность понятия сопряженного числа (утверждения 1),2)) и описывает простейшие свойства сопряженных чисел.

Т е о р е м а 2. Пусть α и β – комплексные числа. Тогда:

1) сумма и произведение сопряженных чисел являются действительными числами: $\alpha\,\overline{\alpha} = |\alpha|^2,\ \alpha + \overline{\alpha} = 2Re\,\alpha$;

2) если $\alpha \neq 0$, то $\alpha^{-1} = \dfrac{\overline{\alpha}}{|\alpha|^2}$;

3) $\overline{\alpha+\beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$;

4) $\overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha} \cdot \overline{\beta}$;

5) $\overline{(-\alpha)} = -\overline{\alpha}$;

6) если $\alpha \neq 0$, то $\overline{(\alpha^{-1})} = (\overline{\alpha})^{-1}$;

7) $\overline{(\alpha-\beta)} = \overline{\alpha} - \overline{\beta}$;

8) если $\beta \neq 0$, то $\overline{(\dfrac{\alpha}{\beta})} = \dfrac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$.

Доказательство равенств 1) – 8) сводится к вычислению левых и правых частей и их сравнению.

Упражнения

1. Изобразите на плоскости множество точек, соответствующих комплексным числам z, удовлетворяющим условиям:

а) $\lvert z\rvert = 1$;	б) $arg\, z = \frac{\pi}{3}$;	в) $\lvert z\rvert \leqslant 2$;
г) $\lvert z-1-i\rvert < 1$;	д) $\lvert z+3+4i\rvert \leqslant 5$;	е) $2 < \lvert z\rvert < 3$;
ж) $1 \leqslant \lvert z-2i\rvert < 2$;	з) $\lvert arg\, z\rvert < \frac{\pi}{6}$;	и) $\lvert Re\, z\rvert \leqslant 1$;
к) $-1 < Re\, iz < 0$;	л) $\lvert Im\, z\rvert = 1$;	м) $\lvert Re\, z + Im\, z\rvert < 1$;
н) $\lvert z-1\rvert + \lvert z+1\rvert = 3$;	о) $\lvert z+2\rvert - \lvert z-2\rvert = 3$;	п) $\lvert z-2\rvert = Re\, z + 2$.

2. Найдите все комплексные числа сопряжённые

а) своему квадрату; б) своему кубу.

3. Покажите, что:

а) комплексное число z является действительным тогда и только тогда, когда $\overline{z} = z$;

b) комплексное число z является чисто мнимым тогда и только тогда, когда $\overline{z} = -z$.

4. Докажите, что произведение двух комплексных чисел является действительным числом тогда и только тогда, когда одно из них отличается от сопряжённого к другому действительным множителем.

5. Выясните, при каких условиях произведение двух комплексных чисел является чисто мнимым числом.

6. Докажите, что если в результате конечного числа операций сложения, вычитания, умножения и деления над комплексными числами $z_1, \ldots, z_n$ получается число z, то в результате тех же действий над сопряжёнными с ними числами $\overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_n$ получится число $\overline{z}$ сопряжённое с z.

§3. Тригонометрическая форма комплексного числа

1. Тригонометрическая форма записи комплексного числа. Модуль r и аргумент φ комплексного числа $\alpha = a + bi$ связаны с его компонентами следующим образом:

$$a = r\,cos\,\varphi, \quad b = r\,sin\,\varphi. \tag{1}$$

Подставляя вместо компонент числа $\alpha = a+bi$ их выражения (1), получаем

$$\alpha = r(cos\,\varphi + i\,sin\,\varphi). \tag{2}$$

Форма записи (2) комплексного числа называется *тригонометрической.*

П р е д о с т е р е ж е н и е («Ложные грибы»). Форма записи комплексных чисел

$$\alpha_1 = (-2)(cos\tfrac{\pi}{3} + i\,sin\tfrac{\pi}{3}), \quad \alpha_2 = 2(cos\tfrac{\pi}{3} - i\,sin\tfrac{\pi}{3}),$$
$$\alpha_3 = 2(sin\tfrac{\pi}{3} + i\,cos\tfrac{\pi}{3}), \quad \alpha_4 = 2(cos\tfrac{\pi}{3} + i\,sin\tfrac{\pi}{4})$$

похожа на тригонометрическую, но не является таковой. Тригонометрическая форма записи чисел α_1, α_2, α_3, имеет вид

$$\alpha_1 = 2(cos\tfrac{4}{3}\pi + i\,sin\tfrac{4}{3}\pi),$$
$$\alpha_2 = 2(cos\tfrac{5}{3}\pi + i\,sin\tfrac{5}{3}\pi),$$
$$\alpha_3 = 2(cos\tfrac{\pi}{6} + i\,sin\tfrac{\pi}{6}).$$

Нахождение тригонометрической формы числа α_4 наталкивается на обычную трудность задачи перевода алгебраической формы записи комплексного числа в тригонометрическую и обратно: по значениям действительной и мнимой частей найти т о ч н о е значение величины угла, а по величине угла найти т о ч н ы е значения его синуса и косинуса.

2. Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме. Тригонометрическая форма записи удобна для выражения произведения и частного комплексных чисел.

Т е о р е м а 1. Произведение комплексных чисел α_1, α_2 есть комплексное число, модуль которого равен произведению модулей, а аргумент – сумме аргументов сомножителей:

$$|\alpha_1\alpha_2| = |\alpha_1| \cdot |\alpha_2|, \quad arg(\alpha_1\alpha_2) = arg\,\alpha_1 + arg\,\alpha_2.$$

Аналогично, для частного комплексных чисел:

$$\left|\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right| = \frac{|\alpha_1|}{|\alpha_2|}, \quad arg\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) = arg\,\alpha_1 - arg\,\alpha_2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\alpha_1 = r_1(cos\,\varphi_1 + {}$ ${}+i\,sin\,\varphi_1)$, $\alpha_2 = r_2(cos\,\varphi_2 + i\,sin\,\varphi_2)$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \alpha_1\alpha_2 &= r_1r_2[(cos\,\varphi_1 \cdot cos\,\varphi_2 - sin\,\varphi_1 \cdot sin\,\varphi_2) + \\ &+ i(sin\,\varphi_1 \cdot cos\,\varphi_2 + cos\,\varphi_1 \cdot sin\,\varphi_2)] = \\ &= r_1r_2(cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\,sin(\varphi_1+\varphi_2)), \end{aligned} \tag{3}$$

что и доказывает утверждение теоремы о произведении. Утверждение о частном следует из равенств $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \alpha_1\alpha_2^{-1}$, $\alpha_2^{-1} = {}$ ${}= \frac{\overline{\alpha_2}}{|\alpha_2|^2} = \frac{r_2}{r_2^2}(cos\,\varphi_2 - i\,sin\,\varphi_2) = r_2^{-1}(cos(-\varphi_2) + i\,sin(-\varphi_2))$ и доказанного утверждения о произведении.

■

Теорема 1 позволяет интерпретировать на комплексной плоскости умножение и деление комплексных чисел (рис. 1):

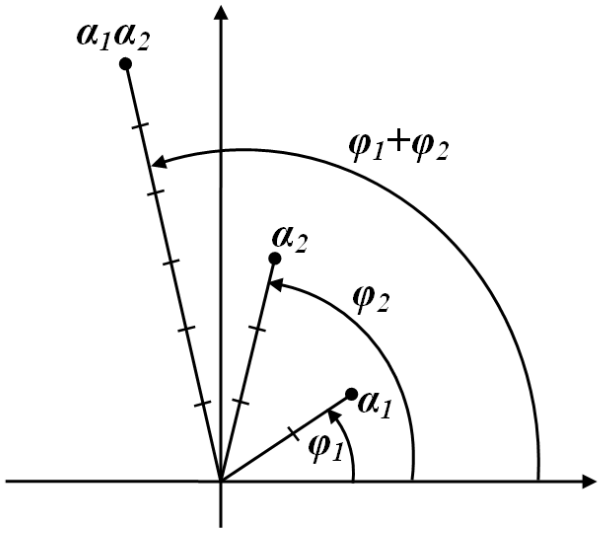

Рис. 1

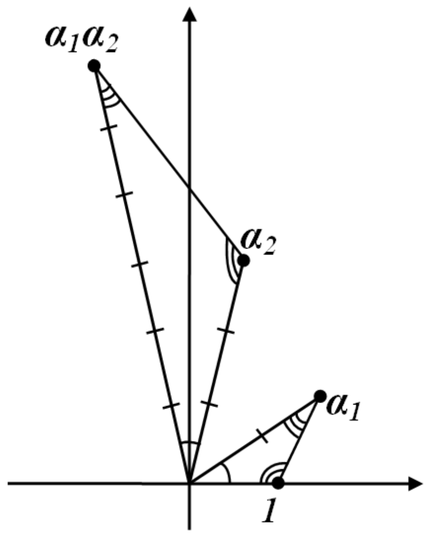

Рис. 2

Произведение комплексных чисел α_1 и α_2 легко построить геометрически (с помощью циркуля и линейки). Из рис. 2 ясно, что это можно сделать, построив подобные треугольники $(0, 1, \alpha_1)$ и $(0, \alpha_2, \alpha_1\alpha_2)$.

З а м е ч а н и е 1. Сравнение выражений для суммы и произведения комплексных чисел, заданных в алгебраической и тригонометрической форме, позволяет сформулировать общий принцип: алгебраическая форма записи комплексных чисел удобна для выражения их аддитивных свойств, а тригонометрическая форма – для выражения мультипликативных свойств. Отметим, что принцип не распространяется на алгебраические действия с конкретными числами. Например, ясно, что при вычислении произведения $(2 + i\sqrt{5})(3 - i\sqrt{7})$ не следует переходить к тригонометрической форме.

3. Возведение комплексного числа в степень. Формула Муавра. Отметим сначала, что $i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1$, откуда для всякого $k \in \mathbb{N}$ получаем

$$i^{4k} = 1,\ i^{4k+1} = i,\ i^{4k+2} = -1,\ i^{4k+3} = -i. \tag{4}$$

Для нахождения степени $(a+bi)^n,\ n \in \mathbb{N}$ произвольного комплексного числа $a+bi$ можно воспользоваться формулой бинома Ньютона (справедливой и для комплексных чисел):

$$\begin{aligned} &(a+bi)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} bi + C_n^2 a^{n-2} b^2 i^2 + \ldots \\ &\ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} i^{n-1} + b^n i^n. \end{aligned} \tag{5}$$

Заменяя степени i^k в правой части формулы (5) их значениями в соответствии с равенствами (4), получим

$$\begin{aligned} &(a+bi)^n = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k C_n^{2k} a^{n-2k} b^{2k} + \\ &+ i \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} (-1)^k C_n^{2k+1} a^{n-2k-1} b^{2k+1}. \end{aligned} \tag{6}$$

Если комплексное число задано в тригонометрической форме $\alpha = r(cos\,\varphi + i\,sin\,\varphi)$, то для всякого $n \in \mathbb{N}$ из формулы (3) умножения комплексных чисел следует равенство

$$[r(cos\,\varphi + i\,sin\,\varphi)]^n = r^n(cos\,n\varphi + i\,sin\,n\varphi), \tag{7}$$

называемое *формулой Муавра.*

З а м е ч а н и е **2.** Формула (7) верна и для целых неположительных показателей n. Действительно, для $n = 0$ равенство (7) справедливо: $[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^0 = 1 = r^0(\cos 0 + i\sin 0)$. Для отрицательных n, т. е. $n = -k,\ k \in \mathbb{N}$, ввиду $(\alpha)^{-k} = (\alpha^{-1})^k$, нужное равенство получается применением формулы Муавра к числу $\alpha_1 = r^{-1}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$.

З а м е ч а н и е 3. С помощью формул (6), (7) можно получить важные выражения для тригонометрических функций.

Возводя комплексное число $\cos\varphi + i\sin\varphi$ в степень n по формулам (6), (7) и сравнивая действительные и мнимые части полученных комплексных чисел, получим выражения косинуса и синуса кратного угла:

$$\cos n\varphi = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k C_n^{2k} \cos^{n-2k}\varphi \cdot \sin^{2k}\varphi,$$
$$\sin n\varphi = \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} (-1)^k C_n^{2k+1} \cos^{n-2k-1}\varphi \cdot \sin^{2k+1}\varphi.$$

Можно получить также выражения для степеней $\cos^n\varphi$, $\sin^n\varphi$ через косинус и синус кратных углов. Пусть $\alpha = \cos\varphi + i\sin\varphi$, тогда $\alpha^{-1} = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi) = \cos\varphi - i\sin\varphi$, $\cos\varphi = (\alpha + \alpha^{-1})/2$, $\sin\varphi = (\alpha - \alpha^{-1})/2i$. Следовательно,

$$\cos^n\varphi = \left(\frac{\alpha + \alpha^{-1}}{2}\right)^n, \quad \sin^n\varphi = \left(\frac{\alpha - \alpha^{-1}}{2i}\right)^n. \qquad (8)$$

Применяя к правым частям равенств (8) формулу бинома Ньютона и заменяя в полученных выражениях α^k, α^{-k}, $0 \le k \le n$ на $\cos k\varphi + i\sin k\varphi$, $\cos k\varphi - i\sin k\varphi$ соответственно, получим искомые выражения.

4. Извлечение корня из комплексного числа.

Определение 1. Пусть α – комплексное число и n – натуральное число. Всякое комплексное число β такое, что $\beta^n = \alpha$, называется *корнем n-й степени* из числа α и обозначается $\sqrt[n]{\alpha}$.

Ясно, что если $\alpha = 0$, то единственным значением $\sqrt[n]{\alpha}$ является число 0. Рассмотрим случай $\alpha \neq 0$.

Теорема 2. Всякое ненулевое комплексное число

$$\alpha = r(cos\,\varphi + i\,sin\,\varphi)$$

имеет ровно n различных корней n-й степени:

$$\beta_k = \sqrt[n]{r}(cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\,sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Доказательство. Предположим, что корни n-й степени из числа α существуют и $\beta = \rho(cos\,\theta + i\,sin\,\theta)$ – некоторый из них. Тогда

$$[\rho(cos\,\theta + i\,sin\,\theta)]^n = r(cos\,\varphi + i\,sin\,\varphi). \qquad (9)$$

Заменяя левую часть равенства (9) её выражением по формуле Муавра, получим

$$\rho^n(cos\,n\theta + i\,sin\,n\theta) = r(cos\,\varphi + i\,sin\,\varphi).$$

Последнее равенство равносильно равенствам

$$\rho^n = r; \quad n\,\theta = \varphi + 2k\pi, \; k \in \mathbb{Z},$$

откуда $\rho = \sqrt[n]{r}$; $\theta = \frac{\varphi+2k\pi}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$ (здесь $\sqrt[n]{r}$ – арифметическое значение корня из положительного числа r). Следовательно, корень β совпадает с одним из чисел множества

$$\sqrt[n]{r}\left(cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\,sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right), \quad k \in \mathbb{Z}. \qquad (10)$$

Таким образом, если корни n-й степени из α существуют, то они принадлежат множеству (10). С другой стороны, n-я степень всякого числа из множества (10), очевидно, равна α, т. е. каждое число множества (10) является корнем n-й степени из α. Следовательно, множество корней n-й степени из α совпадает с множеством (10). Для завершения доказательства остается заметить, что среди чисел множества (10) лишь n различных, например,

$$\beta_k = \sqrt[n]{r}\left(cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\,sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

■

С л е д с т в и е. Точки комплексной плоскости, изображающие корни n-й степени из ненулевого комплексного числа α, расположены на окружности радиуса $\sqrt[n]{|\alpha|}$ с центром в нуле и делят эту окружность на n равных частей, т. е. являются вершинами правильного n-угольника, вписанного в эту окружность.

З а м е ч а н и е 4. Квадратные корни из комплексного числа $\alpha = a+bi$ можно найти не переходя к тригонометрической форме. Действительно, пусть $u+vi$ – квадратный корень из α. Тогда $(u+vi)^2 = a+vi$, откуда

$$\begin{cases} u^2 - v^2 = a, \\ 2\,uv = b. \end{cases}$$

Решая последнюю систему уравнений, найдем два значения квадратного корня из α:

$$\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i\,sgn\,b\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right).$$

Нахождение таким способом корней более высокой степени, чем вторая, наталкивается на непреодолимые трудности. Так, уже при нахождении кубичных корней из комплексного числа приходится решать вспомогательное кубичное уравнение, что в свою очередь требует извлечения кубичного корня из комплексного числа (Circulus vitiosus !).

5. Степень комплексного числа с рациональным, иррациональным и комплексным показателями. Степень комплексного числа α с целым показателем мы определяли так же, как степень действительного числа: $\alpha^n \overset{def}{=} \underbrace{\alpha\cdots\alpha}_{n}$, $\alpha^0 \overset{def}{=} 1$, $\alpha^{-n} \overset{def}{=} (\alpha^{-1})^n$, $n \in \mathbb{N}$ (таким же образом определяют и степень элемента произвольной алгебраической структуры).

Степень $\alpha^{\frac{m}{n}}$ комплексного числа α с рациональным показателем определяют так же, как степень положительного числа в вещественном анализе: считая, что в записи рационального числа $\frac{m}{n}$ числа m и n взаимно просты, полагают

$$\alpha^{\frac{m}{n}} \overset{def}{=} \sqrt[n]{\alpha^m}. \tag{11}$$

Согласно этому определению, степень $\alpha^{\frac{m}{n}}$ комплексного числа α – это множество, состоящее из n комплексных чисел.

З а м е ч а н и е 5. Степень комплексного числа с рациональным показателем $\alpha^{\frac{m}{n}}$ можно определить и без предположения взаимной простоты чисел m и n следующим образом:

$$\alpha^{\frac{m}{n}} \overset{def}{=} (\sqrt[n]{\alpha})^m, \tag{12}$$

где под $(\sqrt[n]{\alpha})^m$ понимается множество m-ых степеней корней n-ой степени из α.

У п р а ж н е н и е 1. Покажите, что для случая, когда числа m и n взаимно просты, степени $\alpha^{\frac{m}{n}}$, определённые равенствами (11) и (12), совпадают. Приведите пример, когда m и n не взаимно просты и $(\sqrt[n]{\alpha})^m \subset \sqrt[n]{\alpha^m}$, $(\sqrt[n]{\alpha})^m \neq \sqrt[n]{\alpha^m}$.

Для определения степени комплексного числа с иррациональным и комплексным показателями воспользуемся понятиями и результатами вещественного анализа.

Степень комплексного числа α с действительным иррациональным показателем s вводится так же, как в вещественном анализе с помощью предельного перехода: $\alpha^s \overset{def}{=}$ $\overset{def}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \alpha^{p_n/q_n}$, $\dfrac{p_n}{q_n} \to s$ (предел последовательности комплексных чисел $\{\beta_n = a_n + ib_n\}$ при $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \neq \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \neq$ $\neq \infty$ равен $\beta = a + ib$).

Степень произвольного комплексного числа с произвольным комплексным показателем определим в несколько этапов: определим сначала степень e^α действительного числа e с комплексным показателем α, затем логарифм $ln\,\alpha$ комплексного числа α и, наконец, степень α^β комплексного числа α с комплексным показателем β.

Степень e^α действительного числа e с комплексным показателем $\alpha = a + bi$ определим так же, как в вещественном анализе, с помощью предельного перехода

$$e^\alpha \overset{def}{=} \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n. \tag{13}$$

Покажем существование предела (13) для всякого $\alpha \in \mathbb{C}$ и вычислим предел. Пользуясь выражениями модуля и аргумента произведения комплексных чисел, найдём значения модуля

$$\left|\left(1 + \frac{a+bi}{n}\right)^n\right| = \left(1 + \frac{2a}{n} + \frac{a^2+b^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} \tag{14}$$

и аргумента (для больших n)

$$arg\left(1 + \frac{a+bi}{n}\right)^n = n\; arctg\left(\frac{\frac{b}{n}}{1+\frac{a}{n}}\right). \tag{15}$$

Из равенств (14), (15) видно, что существуют пределы

$$\lim_{n\to\infty}\left|\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n\right| = e^a, \quad \lim_{n\to\infty} arg\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = b,$$

а, следовательно, и предел (13). Записывая теперь правую часть равенства (13) в тригонометрической форме, получим вполне алгебраическую запись (без пределов) определения (13) степени числа e с комплексным показателем $a+bi$

$$e^{a+bi} \stackrel{def}{=} e^a(cos\, b + i\, sin\, b). \tag{16}$$

Отметим, что для степени e^α с комплексным показателем справедливо привычное свойство из вещественного анализа: при умножении степеней показатели складываются. Действительно,

$$e^{a_1+ib_1}e^{a_2+ib_2} = e^{a_1}(cos\, b_1 + i\, sin\, b_1)e^{a_2}(cos\, b_2 + i\, sin\, b_2) =$$
$$= e^{a_1+a_2}(cos(b_1+b_2) + i\, sin(b_1+b_2)) = e^{(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i}.$$

Полагая в равенстве (16) $a = 0$, получим

$$e^{bi} = cos\, b + i\, sin\, b.$$

Комплексное число, заданное в тригонометрической форме $\alpha = r(cos\,\varphi + i\, sin\,\varphi)$, можно записать теперь в совсем краткой форме $\alpha = r\, e^{\varphi i}$, называемой *показательной.*

З а м е ч а н и е 6. Заменив в равенстве

$$e^{bi} = cos\, b + i\, sin\, b \tag{17}$$

b на $-b$, получим

$$e^{-bi} = cos\, b - i\, sin\, b. \tag{18}$$

Складывая и вычитая правые и левые части равенств (17) и (18), получим

$$cos\, b = \frac{e^{bi} + e^{-bi}}{2}, \quad sin\, b = \frac{e^{bi} - e^{-bi}}{2} \tag{19}$$

Равенства (17) – (19) называются формулами Эйлера. Они устанавливают связь между тригонометрическими функциями и показательной функцией с мнимыми показателями.

Определим теперь натуральный логарифм $ln\, \alpha$ комплексного числа. Отметим, что для комплексного числа $\alpha = r(cos\, \varphi + i\, sin\, \varphi)$ справедливы равенства $\alpha = r\, e^{\varphi i} = e^{ln\, r} e^{\varphi i} = e^{ln\, r + \varphi i}$. Сравнивая полученное равенство $\alpha = e^{ln\, r + \varphi i}$ с известным равенством для действительных чисел $c = e^{ln\, c}$, естественно определить *логарифм комплексного числа* следующим образом:

$$ln\, \alpha \stackrel{def}{=} ln\, r + \varphi i.$$

Таким образом, понятие логарифма определено для всякого ненулевого комплексного числа, вещественной частью логарифма является логарифм модуля, а мнимой частью – аргумент числа. Поскольку аргумент определён неоднозначно, то логарифм комплексного числа является бесконечным множеством.

З а м е ч а н и е 7. Для комплексных чисел также, как и для действительных, справедливо свойство: логарифм произведения чисел равен сумме логарифмов. Однако, равенство

$$ln(\alpha\beta) = ln\,\alpha + ln\,\beta$$

в данном случае не равенство чисел, а равенство множеств $ln(\alpha\beta)$ и $ln\,\alpha + ln\,\beta \stackrel{def}{=} \{u+v:\ u \in ln\,\alpha,\ v \in ln\,\beta\}$.

Определим, наконец, для всякого ненулевого комплексного числа α и любого комплексного числа β степень α^β. Так как $\alpha = e^{ln\,\alpha}$ и для действительных чисел a, b справедливо равенство $(e^a)^b = e^{ab}$, то *степень с комплексным показателем* естественно определить равенством

$$\alpha^\beta \stackrel{def}{=} e^{\beta\, ln\,\alpha}.$$

Так как логарифм является бесконечным множеством, то степень α^β также является бесконечным множеством.

П р е д о с т е р е ж е н и е. Все значения степени α^β, где α и β – комплексные числа, не являющиеся действительными (т. е. с ненулевой мнимой частью) могут быть действительными числами! Например, i^i. Действительно, так как $i = e^{ln\,i}$ и $ln\,i = \left\{\left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right)i,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$, то $i^i = \{e^{i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)i},\ k \in \mathbb{Z}\} = \{e^{-\frac{\pi}{2}+2k\pi},\ k \in \mathbb{Z}\}$.

6. Некоторые группы комплексных чисел. Отметим вначале, что множество $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\setminus 0$ всех обратимых элементов моноида $(\mathbb{C}, \cdot)$ является абелевой группой.

Рассмотрим некоторые подгруппы группы $\mathbb{C} \setminus 0$.

Важной подгруппой группы $\mathbb{C} \setminus 0$ является множество $U = \{\alpha \in \mathbb{C} : \ |\alpha| = 1\}$ всех комплексных чисел, модуль которых равен 1. На комплексной плоскости это множество представляет окружность радиуса 1 с центром в точке 0.

У п р а ж н е н и е 2. Пользуясь критерием подгруппы, убедитесь, что множество $U = \{\alpha \in \mathbb{C} : \ |\alpha| = 1\}$ является подгруппой группы $\mathbb{C} \setminus 0$.

Рассмотрим теперь группы, связанные с корнями из единицы.

Согласно теореме 2, число $1 = cos\, 0 + i\, sin\, 0$ имеет n различных корней n-й степени:

$$\varepsilon_k = cos\frac{2k\pi}{n} + i\, sin\frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Точки комплексной плоскости, изображающие эти корни, являются вершинами правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса 1 с центром в нуле, причем одна из вершин находится в точке $(1, 0)$.

Следующее утверждение показывает значение корней из единицы в задаче нахождения корней из произвольного комплексного числа.

Т е о р е м а 3. Все корни n-й степени из комплексного числа α можно получить, умножив один из корней n-й степени из α на все корни n-й степени из единицы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть β – один из корней n-й степени из α, т. е. $\beta^n = \alpha$, а ε_i – какой-нибудь корень n-й степени из единицы, т. е. $\varepsilon_i^n = 1$. Тогда $(\beta\,\varepsilon_i)^n = \beta^n\varepsilon_i^n = \alpha$, следовательно, $\beta\,\varepsilon_i$ – корень n-й степени из α. С другой стороны, всякий корень β_i n-й степени из α можно представить в виде $\beta_i = \beta(\beta^{-1}\beta_i)$, где $\beta^{-1}\beta_i$ – корень n-й степени из единицы, поскольку $(\beta^{-1}\beta_i)^n = (\beta^n)^{-1}\beta_i^n = \alpha^{-1}\alpha = 1$.

■

Т е о р е м а 4. Множество U_n всех корней n-й степени из 1 с операцией умножения комплексных чисел является абелевой группой.

Для доказательства теоремы 4 достаточно показать, что множество U_n является подгруппой группы $\mathbb{C}\backslash 0$ или U. Предлагаем это сделать читателю.

В силу формулы Муавра всякий корень $\varepsilon_k = cos\frac{2k\pi}{n} + i\,sin\frac{2k\pi}{n}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ n-ой степени из 1 является степенью корня $\varepsilon_1 = cos\frac{2\pi}{n} + i\,sin\frac{2\pi}{n}$: $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$. Поэтому группа U_n является циклической, а корень ε_1 – её образующей, т. е. $U_n =< \varepsilon_1 >$. У группы U_n могут быть и другие образующие, например, группа U_4 имеет две образующие: i, $-i$. Рассмотрим задачу нахождения всех образующих группы U_n.

Заметим, что всякий корень n-й степени из 1 будет также корнем m-й степени из 1 для всякого m кратного n. Поэтому для всякого делителя d числа n каждый корень d-й степени из 1 является корнем n-й степени из 1. Однако, для всякого числа n существуют корни n-й степени из 1, которые не являются корнями из 1 никакой меньшей степени. Такие корни называются *первообразными* (или *принадлежащими показателю* n).

Т е о р е м а 5. Корень $\varepsilon_k = cos\frac{2k\pi}{n} + i\,sin\frac{2k\pi}{n}$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$ n-й степени из 1 тогда и только тогда является образующим элементом группы U_n, когда он является первообразным.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть ε_k – образующий элемент группы U_n. Предположим, что ε_k не является первообразным корнем, т. е. $\varepsilon_k \in U_s$ для некоторого s, $0 < s \leqslant n-1$. Так как все степени ε_k^m, $m \in \mathbb{Z}$ элемента $\varepsilon_k \in U_s$ принадлежат группе U_s, состоящей из s элементов, то в последовательности $\{\varepsilon_k^m\}$, $m \in \mathbb{Z}$ не более чем $s \leqslant n-1$ различных чисел и, значит, по крайней мере один из n различных корней $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ не является степенью корня ε_k, т. е. ε_k не является образующим элементом группы U_n. Противоречие.

2) Пусть ε_k – первообразный корень. Предположим, что ε_k не является образующим элементом группы U_n, т. е. существует корень $\varepsilon_p \in U_n$ такой, что $\varepsilon_k^m \neq \varepsilon_p$ для всякого $m \in \mathbb{Z}$. Так как все степени ε_k^m, $m \in \mathbb{Z}$ элемента $\varepsilon_k \in U_n$ принадлежат группе U_n, состоящей из n элементов, и $\varepsilon_k^m \neq \varepsilon_p$, то число различных чисел в последовательности $\{\varepsilon_k^m\}$, $m \in \mathbb{Z}$ не превосходит $n-1$. Поэтому в ряду n чисел $\varepsilon_k^0, \varepsilon_k^1, \ldots, \varepsilon_k^{n-1}$ не более чем $n-1$ различных, а, значит, имеются одинаковые.

Пусть, например, $\varepsilon_k^p = \varepsilon_k^q$, $0 \leqslant p < q \leqslant n-1$. Тогда $\varepsilon_k^{q-p} = 1$ и $1 \leqslant q-p \leqslant n-1$, т. е. корень ε_k не является первообразным. Противоречие.

■

Укажем теоретико-числовое описание первообразных корней. Следующее утверждение является инструментом для нахождения первообразных корней.

Т е о р е м а 6. Корень $\varepsilon_k = cos\frac{2k\pi}{n} + i\, sin\frac{2k\pi}{n}$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$ n-й степени из 1 тогда и только тогда является первообразным корнем, когда числа n и k взаимно просты.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть ε_k – первообразный корень n-й степени из 1. Пусть $d = \text{НОД}(n, k)$, $n = dn_1$, $k = dk_1$. Тогда $\varepsilon_k = cos\frac{2k_1\pi}{n_1} + i\, sin\frac{2k_1\pi}{n_1}$ и $\varepsilon_k^{n_1} = 1$. Так как ε_k – первообразный корень, то из равенств $\varepsilon_k^{n_1} = 1$ и $n = dn_1$ следует, что $d = 1$, т. е. n и k взаимно просты.

2) Пусть n и k взаимно просты и $\varepsilon_k^m = 1$, $m \in \mathbb{N}$. Из равенства $\varepsilon_k^m = 1$ комплексных чисел ε_k^m и 1, записанных в тригонометрической форме, следует зависимость их аргументов $\frac{2k\pi m}{n} = 2\pi p$ для некоторого $p \in \mathbb{N}$, откуда $\frac{km}{n} = p$ и, значит, km делится на n. Но n и k взаимно просты, следовательно, m делится на n и потому не может быть меньше n. Следовательно, ε_k – первообразный корень.

■

П р и м е р. Рассмотрим группу U_{12}. Среди чисел от 1 до 12 четыре числа 1, 5, 7, 11 взаимно просты с 12. Поэтому первообразными корнями 12-й степени из 1, т. е. образующими элементами группы U_{12}, являются $\varepsilon_1, \varepsilon_5, \varepsilon_7, \varepsilon_{11}$.

З а м е ч а н и е 8. В силу теорем 5, 6 для всякого числа $n \in \mathbb{N}$ число образующих элементов группы U_n равно числу $\varphi(n)$ меньших n и взаимно простых с n чисел. Целочисленная функция $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, заданная правилом $n \mapsto \varphi(n)$, представляет хорошо известную в теории чисел функцию Эйлера, которая может быть вычислена по формуле

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right),$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_k$ – простые делители в каноническом разложении $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots , p_k^{\alpha_k}$. В частности, если n – простое число, то $\varphi(n) = n - 1$; в этом случае все элементы группы U_n, кроме 1, являются образующими.

У п р а ж н е н и е 3. Покажите, что группа U_n изоморфна группе $\mathbb{Z}_n$.

Упражнения

1. Найдите тригонометрическую форму числа

а) $2 + \sqrt{3} + i$; б) $tg\,\varphi - i$; в) $1 + cos\,\varphi + i\,sin\,\varphi$.

2. Вычислите

а) $\left(1 + \dfrac{\sqrt{3} + i}{2}\right)^{24}$; б) $(1 + cos\,\varphi + i\,sin\,\varphi)^n$;

в) $\dfrac{(1+i)^{n+2}}{(1-i)^n}$, $n \in \mathbb{Z}$.

3. Докажите равенства

$$(1+i)^{8n} = 2^{4n},\ n \in \mathbb{Z};\ \ (1+i)^{4n} = (-1)2^{2n},\ n \in \mathbb{Z}.$$

4. Решите уравнение

$$z^2 - (1+i)z + 6 + 3i = 0.$$

5. Докажите, что всякое комплексное число z, отличное от –1, модуль которого равен 1, может быть представлено в форме $z = \dfrac{1+ti}{1-ti}$.

6. Выразите $tg\, nx$, $n \in \mathbb{N}$ в виде частного многочленов от $sin\, x$ и $cos\, x$.

7. Вычислите суммы:

$$\begin{aligned}
a)\ \ & s(x) = cos\, x + cos\, 2x + \ldots + cos\, nx,\\
& u(x) = sin\, x + sin\, 2x + \ldots + sin\, nx;\\
b)\ \ & s(x) = cos^2 x + cos^2 2x + \ldots + cos^2 nx,\\
& u(x) = sin^2 x + sin^2 2x + \ldots + sin^2 nx;\\
c)\ \ & s(x) = 1 + a\, cos\, x + a^2 cos\, 2x + \ldots + a^n cos\, nx,\\
& u(x) = a\, sin\, x + a^2 sin\, 2x + \ldots + a^n sin\, nx
\end{aligned}$$

(указание: рассмотрите сумму $s(x) + iu(x)$).

8. Вычислите суммы:

а) $1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \cdots$;

б) $C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \cdots$

(указание: вычислите $(1+i)^n$ по формуле бинома Ньютона и по формуле Муавра).

9. Найдите сумму и произведение всех корней n-й степени из единицы.

10. Покажите, что множество $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ является подгруппой группы U.

11. Покажите, что отображение $f : \mathbb{R} \to U$, $f(t) = cos\, t + i\, sin\, t$ является гомоморфизмом групп $\mathbb{R}$ и U.

12. Покажите, что отображение $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \overline{z}$ является изоморфизмом поля комплексных чисел на себя.

13. Пусть $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ – изоморфизм поля $\mathbb{C}$ на себя. Покажите, что $f(i) = i$ или $f(i) = -i$.

14. Покажите, что отображение $\mu : \mathbb{C} \setminus 0 \to \mathbb{R}_+$, определённое равенством $\mu(\alpha) = |\alpha|$, является гомоморфизмом групп $(\mathbb{C} \setminus 0, \cdot)$, $(\mathbb{R}_+, \cdot)$ и $Ker\, \mu = U$.

15. Обозначим R_φ поворот плоскости $\mathbb{R}^2$ на угол $\varphi \in \mathbb{R}$ вокруг точки 0. Покажите, что множество $S_{\text{ПОВ}}(\mathbb{R}^2) = \{R_\varphi : \ \varphi \in \mathbb{R}\}$ всех поворотов с операцией «$\circ$» суперпозиции является абелевой группой. Покажите, что отображение $F : (\mathbb{C} \setminus 0) \to S_{\text{ПОВ}}(\mathbb{R}^2)$, определённое равенством $F(\alpha) = R_{arg\, \alpha}$, является гомоморфизмом группы $(\mathbb{C} \setminus 0, \cdot)$ на группу $(S_{\text{ПОВ}}(\mathbb{R}^2), \circ)$ и найдите $Ker\, F$.

Список литературы

[1] Кострикин А.И. Введение в алгебру : в 3 ч. / А.И. Кострикин. — М. : Физматлит, 2009. — Ч. 1 : Основы алгебры. — 271 с.

[2] Курош А.Г. Курс высшей алгебры / А.Г. Курош. — Изд. 18-е, стер. — Санкт-Петербург [и др.] : Лань, 2011. — 431 с.

[3] Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре / Д.К. Фаддеев. — Изд. 5-е, стер. — СПб. [и др.] : Лань, 2007. — 415, [1] с.

[4] Виндберг Э.Б. Курс алгебры / Э.Б. Виндберг. — М. : Изд-во «Факториал», 1999. — 528 с.

[5] Зуланке Р. Алгебра и геометрия : в 3 т. / Р. Зуланке, А.Л. Онищик. — М. : МЦНМО, 2004. — Т. 1 : Введение. — 408 с.

[6] Кантор И.Л. Гиперкомплексные числа / И.Л. Кантор, А.С. Солодовников. — М. : Наука, 1973. — 144 с.

[7] Сборник задач по алгебре : в 2 т. / сост. : В.А. Артамонов [и др.] ; под ред. А.И. Кострикина. — М. : Физматлит, 2007. — Т. 1 : Ч. 1. Ч. 2 : Основы алгебры. Линейная алгебра и геометрия. — 2007. — 264 с. ; Т. 2 : Ч. 3 : Основные алгебраические структуры. — 2007. — 168 с.

[8] Фаддеев Д.К. Сборник задач по высшей алгебре / Д.К. Фаддеев, И.С. Соминский. — М. : Наука, 1977. — 288 с.

Содержание

Учебное издание

Составитель:
Близняков Николай Михайлович

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Учебно-методическое пособие для вузов

Редактор И.Г. Валынкина