МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

В.В. Смагин

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ФУНКЦИОНАЛЫ

Учебное пособие для вузов

Издательско-полиграфический центр
Воронежского государственного университета
2011

Утверждено научно-методическим советом математического факультета 20 мая 2011 г., протокол № 0500-05

Рецензент доктор физ.-мат. наук, профессор А.Г. Баскаков

Учебное пособие подготовлено на кафедре функционального анализа и операторных уравнений математического факультета Воронежского государственного университета.

Рекомендуется для студентов третьего курса математического факультета.

Для направления 010100 – Математика; специальности 010101 – Математика

В пособии излагаются классические результаты теории линейных операторов и функционалов, как ограниченных, так и неограниченных. В основу предложенного материала положены лекции автора по курсу "Функциональный анализ", который читается на третьем курсе (шестой семестр) математического факультета Воронежского государственного университета.

В пособие включены также задачи и упражнения, которые иллюстрируют теоретический курс и предлагаются для решения на практических занятиях.

В конце разработки приводится список использованных при работе над данным пособием источников [1]–[17]. Эти книги рекомендуются для самостоятельного более глубокого изучения предмета.

Знаком ♡ в пособии обозначается завершение доказательства.

Содержание

§ 1. Определения и простейшие свойства

Пусть E, F – линейные нормированные пространства. Отображение A назовем отображением из E в F, если для A область определения $D(A) \subset E$, а множество значений $R(A) \subset F$. В таком случае пишем $A:\ D(A) \subset E \to F$.

Предположим, что пространства E, F оба вещественные, или оба комплексные. Отображение A из E в F называется *линейным оператором*, если:

1) $D(A)$ – линейное многообразие в E;

2) $A(\lambda x) = \lambda Ax$, где $x \in D(A)$ и λ число;

3) $A(x + y) = Ax + Ay$, где $x, y \in D(A)$.

Нетрудно показать, что для линейного оператора A множество значений $R(A)$ является линейным многообразием в F. Заметим также, что $A\Theta = \Theta$.

Линейный оператор f из E – вещественного линейного нормированного пространства в $\mathbb{R}^1$ называется *вещественным линейным функционалом.* Линейный оператор f из E – комплексного линейного нормированного пространства в $\mathbb{C}^1$ называется *комплексным линейным функционалом.*

Замечание. Так как $D(A)$ – линейное многообразие в E, то $D(A)$ с нормой, порожденной пространством E, можно считать самостоятельным линейным нормированным пространством. Поэтому часто считают, что линейный оператор A задан на всем пространстве E и пишут $A:\ E \to F$, то есть $D(A) = E$.

Теорема 1.1. *Пусть E, F – линейные нормированные пространства и $A:\ E \to F$ – линейный оператор. Пусть оператор A непрерывен в точке $x_0 \in E$. Тогда оператор A непрерывен в любой точке $x \in E$.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\} \subset E$ такая, что $x_n \to x$ при $n \to \infty$. Рассмотрим

$$Ax_n - Ax = A(x_n - x + x_0) - Ax_0.$$

Здесь $y_n = x_n - x + x_0 \to x_0$ при $n \to \infty$. Следовательно,

$$\|Ax_n - Ax\|_F = \|Ay_n - Ax_0\|_F \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \qquad \heartsuit$$

Линейный оператор $A:\ D(A) \subset E \to F$ называется *ограниченным на* $D(A)$, если

$$(\exists C \geq 0)(\forall\, x \in D(A))[\, \|Ax\|_F \leq C\|x\|_E]. \tag{1.1}$$

Теорема 1.2. *Пусть E, F – линейные нормированные пространства. Линейный оператор $A:\ E \to F$ непрерывен на E тогда и только тогда, когда он ограничен на E.*

Доказательство. Пусть оператор A непрерывен на E, но не является ограниченным. Тогда

$$(\forall\, n \in \mathbb{N})(\exists\, x_n \in E)[\, \|Ax_n\|_F > n\|x_n\|_E].$$

Заметим, что $x_n \neq \Theta$. Определим элементы $x'_n = x_n/(n\|x_n\|_E)$. Тогда $\|x'_n\|_E = 1/n \to 0$ при $n \to \infty$, то есть $x'_n \to \Theta \in E$. Из непрерывности оператора A следует

$$\|Ax'_n\|_F = \|Ax'_n - A\Theta\|_F \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

С другой стороны

$$\|Ax'_n\|_F = \frac{1}{n\|x_n\|_E}\,\|Ax_n\|_F > \frac{1}{n\|x_n\|_E}\,n\|x_n\|_E = 1.$$

Из полученного противоречия следует ограниченность оператора A на E.

Теперь предположим, что оператор A ограничен на E. Тогда из оценки $\|Ax - Ay\|_F \leq C\|x-y\|_E$ для $x, y \in E$ следует, что оператор A на E удовлетворяет условию Липшица и, следовательно, непрерывен на E. ♡

Замечание. Полученные утверждения выполняются и для линейных функционалов, как частного случая линейных операторов. Отметим здесь, что линейный функционал f, определенный на $D(f) \subset E$ ограничен на $D(f)$, если

$$(\exists C \geq 0)(\forall\, x \in D(f))[\,|f(x)| \leq C\|x\|_E].$$

Теорема 1.3. *Пусть E, F – линейные нормированные пространства, и пространство E конечномерно. Пусть $A : E \to F$ линейный оператор. Тогда оператор A ограничен на E.*

Доказательство. Пусть $E = \mathscr{L}(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_m)$, где $\{\omega_k\}_{k=1}^m$ – базис пространства E. Тогда всякий $x \in E$ представим в виде $x = \sum_{k=1}^m x_k\omega_k$, где x_k – координаты элемента x в базисе $\{\omega_k\}$. Определим в E новую норму $\|x\|_E^* = \sum_{k=1}^m |x_k|$. Исходная норма $\|x\|_E$ и новая $\|x\|_E^*$ эквивалентны. Тогда

$$(\exists M > 0)(\forall\, x \in E)[\,\|x\|_E^* \leq M\|x\|_E].$$

Далее для любого $x \in E$ получим

$$\|Ax\|_F = \left\|A\sum_{k=1}^m x_k\omega_k\right\|_F = \left\|\sum_{k=1}^m x_kA\omega_k\right\|_F \leq \sum_{k=1}^m |x_k|\|A\omega_k\|_F \leq$$

$$\leq \max_k \|A\omega_k\|_F \sum_{k=1}^m |x_k| \leq M\max_k \|A\omega_k\|_F\|x\|_E = C\|x\|_E,$$

где константа $C = M\max_k \|A\omega_k\|_F < \infty$. ♡

• Задача.

1.1. Пусть E – банахово пространство и F – линейное нормированное пространство. Пусть $A : E \to F$ линейный ограниченный оператор такой, что

$(\exists c > 0)(\forall x \in E)\big(\|Ax\|_F \geq c\,\|x\|_E\big)$. Показать, что множество значений оператора $R(A)$ – подпространство F.

§ 2. Норма линейного ограниченного оператора

Пусть E, F – линейные нормированные пространства. Пусть линейный оператор $A:\ D(A) \subset E \to F$ ограниченный на $D(A)$. Тогда из (1.1) следует, что числовое множество

$$M = \left\{ \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E} \,\middle|\, (x \in D(A)) \wedge (x \neq \Theta) \right\}$$

ограничено сверху константой $C \geq 0$. Обозначим

$$\|A\| = \sup M = \sup_{\substack{x \in D(A) \\ x \neq \Theta}} \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E} \leq C < \infty. \tag{2.1}$$

Величина $\|A\|$ называется *нормой оператора* A *на* $D(A)$. Если $D(A) = E$, то $\|A\|$ называется просто *нормой оператора* A. Иногда норму оператора обозначают с указанием пространств $\|A\|_{E \to F}$.

Очевидно, что

$$(\forall\, x \in D(A))[\,\|Ax\|_F \leq \|A\|\,\|x\|_E].$$

С другой стороны

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, x_\varepsilon \in D(A)) \left[\frac{\|Ax_\varepsilon\|_F}{\|x_\varepsilon\|_E} > \|A\| - \varepsilon \right],$$

то есть $\|Ax_\varepsilon\|_F > (\|A\| - \varepsilon)\|x_\varepsilon\|_E$. Таким образом, $\|A\| = \min C$, где константы C фигурируют в условии (1.1).

Теорема 2.1. *Пусть E, F – линейные нормированные пространства. Пусть $A:\ D(A) \subset E \to F$ – линейный оператор, ограниченный на $D(A)$. Тогда*

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in D(A) \\ x \neq \Theta}} \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\substack{x \in D(A) \\ \|x\|_E \leq 1}} \|Ax\|_F = \sup_{\substack{x \in D(A) \\ \|x\|_E = 1}} \|Ax\|_F.$$

Доказательство. Заметим, что

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in D(A) \\ x \neq \Theta}} \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\substack{x \in D(A) \\ x \neq \Theta}} \left\| A\,\frac{x}{\|x\|_E} \right\|_F \leq$$

$$\leq \sup_{\substack{y \in D(A) \\ \|y\| = 1}} \|Ay\|_F = \sup_{\substack{y \in D(A) \\ \|y\| = 1}} \frac{\|Ay\|_F}{\|y\|_E} \leq \|A\|.$$

Осталось показать, что

$$\sup_{\substack{x\in D(A)\\ \|x\|_E\le 1}} \|Ax\|_F = \|A\|.$$

Пусть $x \in D(A)$ такой, что $\|x\|_E \le 1$. Тогда $\|Ax\|_F \le \|A\|\,\|x\|_E \le \|A\|$. Отсюда следует

$$\|A\| \ge \sup_{\substack{x\in D(A)\\ \|x\|_E\le 1}} \|Ax\|_F \ge \sup_{\substack{x\in D(A)\\ \|x\|_E= 1}} \|Ax\|_F = \|A\|. \quad \heartsuit$$

Пример 2.1. Линейный оператор Фредгольма в $C[a,b]$.

В вещественном пространстве $C[a,b]$ определим оператор Фредгольма

$$Ax(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)\,ds,$$

где функция $K(t,s)$ непрерывная по совокупности переменных $t,s \in [a,b]$. Для функции $x \in C[a,b]$ функция $Ax(t)$ непрерывная по $t \in [a,b]$, так как функция $K(t,s)x(s)$ непрерывная по совокупности переменных $t,s \in [a,b]$ (см., напр., [18]). Следовательно, оператор $A : C[a,b] \to C[a,b]$.

Очевидно, что оператор A линейный. Установим ограниченность.

$$\|Ax\| = \max_{a\le t\le b}\left|\int_a^b K(t,s)x(s)\,ds\right| \le \max_{a\le t\le b}\int_a^b |K(t,s)||x(s)|\,ds \le$$

$$\le \max_{a\le t\le b}\int_a^b |K(t,s)|\,ds\,\|x\|.$$

Итак, оператор A ограниченный и

$$\|A\| \le \max_{a\le t\le b}\int_a^b |K(t,s)|\,ds < \infty. \tag{2.2}$$

Покажем, что на самом деле в (2.2) имеет место равенство. В силу непрерывности по $t \in [a,b]$ функции $\int_a^b |K(t,s)|\,ds$ найдется $t_0 \in [a,b]$, что

$$\max_{a\le t\le b}\int_a^b |K(t,s)|\,ds = \int_a^b |K(t_0,s)|\,ds.$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ определим функцию

$$x_\varepsilon(t) = \frac{K(t_0,t)}{\varepsilon + |K(t_0,t)|} \in C[a,b].$$

Заметим, что $\|x_\varepsilon\| \le 1$. Далее получим

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|Ax\| \ge \|Ax_\varepsilon\| \ge |Ax_\varepsilon(t_0)| \ge Ax_\varepsilon(t_0) = \int_a^b K(t_0,s)x_\varepsilon(s)\,ds =$$

$$= \int_a^b K(t_0,s)\frac{K(t_0,s)}{\varepsilon + |K(t_0,s)|}\,ds = \int_a^b \frac{(|K(t_0,s)| + \varepsilon - \varepsilon)|K(t_0,s)|}{\varepsilon + |K(t_0,s)|}\,ds =$$

$$= \int_a^b |K(t_0,s)|\,ds - \varepsilon\int_a^b \frac{|K(t_0,s)|}{\varepsilon + |K(t_0,s)|}\,ds \ge \int_a^b |K(t_0,s)|\,ds - \varepsilon(b-a).$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получим

$$\|A\| \ge \int_a^b |K(t_0,s)|\,ds = \max_{a\le t\le b}\int_a^b |K(t,s)|\,ds. \tag{2.3}$$

Таким образом, из (2.2) и (2.3) следует для оператора Фредгольма

$$\|A\| = \max_{a\le t\le b}\int_a^b |K(t,s)|\,ds.$$

Пример 2.2. Простейший оператор дифференцирования.

В пространстве $C[0,1]$ рассмотрим оператор

$$Ax(t) = \frac{d}{dt}\,x(t). \tag{2.4}$$

За область определения этого оператора примем множество $D(A) = C^1[0,1]$, то есть множество непрерывно дифференцируемых на $[0,1]$ функций. Тогда A – линейный оператор, действующий в $C[0,1]$.

Покажем неограниченность оператора A на $D(A)$. Для $n \in \mathbb{N}$ положим $x_n(t) = \sin n\pi t$. Тогда $Ax_n(t) = n\pi\cos n\pi t$. Для $x \in C[0,1]$ норма $\|x\|_C = \max_{0\le t\le 1}|x(t)|$, поэтому

$$\|x_n\|_C = 1, \qquad \|Ax_n\|_C = n\pi = n\pi\|x_n\|_C.$$

Из последнего равенства следует, что условие (1.1) ограниченности оператора A не выполняется, так как $n\pi \to \infty$ при $n \to \infty$.

Рассмотрим оператор, который задается формулой (2.4), но уже из пространства $C^1[0,1]$ с нормой $\|x\|_{C^1} = \|x\|_C + \|x'\|_C$ в пространство $C[0,1]$. Итак, $A : C^1[0,1] \to C[0,1]$. Очевидно, что оператор A линейный. Кроме того, для всех $x \in C^1[0,1]$

$$\|Ax\|_C = \|x'\|_C \le \|x\|_C + \|x'\|_C = \|x\|_{C^1}.$$

Получили, что оператор дифференцирования $A : C^1[0,1] \to C[0,1]$ ограничен и $\|A\|_{C^1\to C} \le 1$. Найдем точное значение нормы оператора. Для $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим функции $x_n(t) = (n\pi)^{-1}\sin n\pi t$. Тогда $Ax_n(t) = \cos n\pi t$ и, следовательно, $\|Ax_n\|_C = 1$. Далее получим

$$\|x_n\|_{C^1} = \|x_n\|_C + \|x_n'\|_C = \frac{1}{n\pi} + 1.$$

Следовательно,

$$\|A\|_{C^1\to C} = \sup_{\substack{x\in C^1\\ x\neq\Theta}} \frac{\|Ax\|_C}{\|x\|_{C^1}} \ge \frac{\|Ax_n\|_C}{\|x_n\|_{C^1}} = \frac{n\pi}{1+n\pi}. \qquad (2.5)$$

Учитывая, что $n \in \mathbb{N}$ любые, из (2.5) при $n \to \infty$ получим $\|A\|_{C^1\to C} \ge 1$. Таким образом, для оператора дифференцирования $\|A\|_{C^1\to C} = 1$.

• Задачи.

2.1. В пространстве $C[-1,1]$ рассмотрим операторы

$$Ax(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)], \quad Bx(t) = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)].$$

Доказать, что A, B – линейные ограниченные операторы в $C[-1,1]$ и найти их нормы.

2.2. Пусть $f(x) = a\,x(0) + b\,x(1)$, где $a, b \in \mathbb{R}^1$. Показать, что f – линейный ограниченный функционал на $C[0,1]$ и найти его норму.

2.3. Пусть $a = (a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots) \in l_2$. Для $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots) \in l_2$ определим $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$. Доказать, что f – линейный ограниченный функционал на l_2 и найти его норму.

2.4. Показать, что f – линейный ограниченный функционал на $C[-1,1]$ и найти его норму:

а) $f(x) = x(0) - \int_{-1}^{1} x(t)\,dt$; б) $f(x) = \int_{-1}^{0} x(t)\,dt - \int_{0}^{1} x(t)\,dt$.

2.5. Пусть $a = (a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots) \in m$. Для $x \in l_2$ определим оператор $Ax = (a_1x_1, a_2x_2, \ldots, a_kx_k, \ldots)$. Доказать, что $A : l_2 \to l_2$ – линейный ограниченный оператор и найти его норму.

2.6. Пусть $f(x) = \int_0^{2\pi} \cos t\, x(t)\,dt$. Показать, что f – линейный ограниченный функционал на пространствах: а) $C[0,2\pi]$, б) $L_1(0,2\pi)$, в) $L_2(0,2\pi)$. Найти соответствующие нормы функционала f.

2.7. Пусть $A\,x(t) = x(t)\cos t$. Показать, что $A : L_2(0,\pi) \to L_2(0,\pi)$, является линейным ограниченным оператором и найти $\|A\|$.

2.8. Пусть $A\,x(t) = x(t)\sin t$. Показать, что $A : L_1(0,\pi) \to L_1(0,\pi)$, является линейным ограниченным оператором и найти $\|A\|$.

2.9. В гильбертовом пространстве H оператор ортогонального проектирования на подпространство $L \subset H$ для $x = u+v$ ($u \in L$, $v \in L^{\perp}$) определяется равенством $Px = u$. Доказать, что P – линейный ограниченный оператор, действующий в H, и найти его норму.

2.10. Пусть H – гильбертово пространство, L_1 и L_2 – два подпространства H. Пусть P_1 и P_2 – операторы ортогонального проектирования на L_1 и L_2 соответственно. Доказать, что $\|P_1 - P_2\| \le 1$.

2.11. Для $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots) \in l_2$ на области определения $D(A) = \{x \in l_2 \,|\, \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k x_k|^2 < \infty\}$ задан оператор $Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots)$, где числа $\{\lambda_k\}$ такие, что $\sup_k |\lambda_k| = \infty$. Показать, что $\overline{D(A)} = l_2$ и A – действующий в l_2 линейный неограниченный на $D(A)$ оператор.

2.12. Для $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots) \in l_2$ на $D(A) = \{x \in l_2 \,|\, \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty\}$ задан оператор $Ax = x$. Показать, что $\overline{D(A)} = l_2$ и A – действующий из l_2 в l_1 линейный неограниченный на $D(A)$ оператор.

§ 3. Пространство линейных ограниченных операторов

Пусть E, F – линейные нормированные пространства, причем оба вещественные или оба комплексные. Через $L(E, F)$ обозначим множество всех линейных ограниченных операторов $A : E \to F$. В случае $F = E$ вместо $L(E, E)$ пишут $L(E)$.

Определим на множестве $L(E, F)$ операции умножения на число и сложение. Считаем для числа λ и $A, B \in L(E, F)$ операторы λA и $A + B$ такие, что для $x \in E$

$$(\lambda A)x = (\lambda)Ax, \quad (A + B)x = Ax + Bx\,.$$

Нетрудно видеть, что так определенные операторы λA и $A + B$ принадлежат $L(E, F)$. В качестве нуля $\Theta \in L(E, F)$ определим оператор Θ такой, что $\Theta x = \Theta \in F$ для всех $x \in E$. Легко проверить выполнение в $L(E, F)$ всех аксиом линейного пространства.

В полученном линейном пространстве $L(E, F)$ определим *норму*. Для $A \in L(E, F)$ положим, как и в (2.1),

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in E \\ x \ne \Theta}} \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E}\,.$$

Для проверки аксиом нормы напомним

$$(\forall\, x \in E)[\, \|Ax\|_F \le \|A\|\, \|x\|_E]\,.$$

1). Очевидно, что $\|A\| \ge 0$. Пусть теперь $\|A\| = 0$. Тогда $\|Ax\|_F = 0$ для всех $x \in E$. Следовательно, $Ax = \Theta$ для всех $x \in E$ и оператор $A = \Theta \in L(E, F)$.

Для $\Theta \in L(E,F)$ свойство $\|\Theta\| = 0$ очевидно. Доказана первая аксиома.
2). Вторая аксиома нормы следует из соотношения

$$\|\lambda A\| = \sup_{\substack{x\in E \\ x\neq\Theta}} \frac{\|\lambda Ax\|_F}{\|x\|_E} = |\lambda|\,\|A\|\,.$$

3). Третья аксиома нормы следует из оценки для всех $x \in E$.

$$\|(A+B)x\|_F \le \|Ax\|_F + \|Bx\|_F \le (\|A\| + \|B\|)\|x\|\,,$$

которая означает $\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|$.

Итак, $L(E,F)$ – линейное нормированное пространство и определена сходимость по норме операторов. Пусть последовательность операторов $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L(E,F)$ такая, что для некоторого оператора $A \in L(E,F)$ выполняется $\|A_n - A\| \to 0$ при $n \to \infty$. В таком случае говорят, что операторы $A_n\,(n \in \mathbb{N})$ сходятся к оператору A по операторной норме. Такую сходимость $A_n \to A$ называют также *равномерной* сходимостью, поскольку она равносильна $\|A_n x - Ax\|_F \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно по x из любого шара $B[\Theta, r] = \{x \in E \mid \|x\|_E \le r\}$. Факт равномерной сходимости операторов при $n \to \infty$ будем обозначать $A_n \rightrightarrows A$.

Теорема 3.1. *Пусть E – линейное нормированное пространство и пространство F банахово. Тогда пространство $L(E,F)$ с операторной нормой является банаховым пространством.*

Доказательство. Возьмем произвольную фундаментальную последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L(E,F)$, то есть

$$(\forall\,\varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall\, n \ge N)(\forall\, p \in \mathbb{N})\,[\,\|A_{n+p} - A_n\| < \varepsilon]\,. \qquad (3.1)$$

Пусть $x \in E$. Из неравенства

$$\|A_{n+p}\,x - A_n\,x\|_F \le \|A_{n+p} - A_n\|\,\|x\|_E \qquad (3.2)$$

и (3.1) следует фундаментальность последовательности $\{A_n x\}_{n=1}^{\infty} \subset F$. Но пространство F полное, поэтому эта последовательность сходится в F. Обозначим $\lim_{n\to\infty} A_n x = y(x) \in F$. Таким образом, определено отображение $A : E \to F$, действующее по правилу $Ax = y(x) = \lim_{n\to\infty} A_n x$.

Линейность отображения A очевидным образом следует из линейности операторов A_n и свойств предела. Итак, $A : E \to F$ – линейный оператор.

Установим ограниченность этого оператора. Так как всякая фундаментальная последовательность ограничена, то $(\exists C > 0)(\forall n \in \mathbb{N})\,[\,\|A_n\| \le C]$. Следовательно, для всех $x \in E$ выполняется $\|A_n x\|_F \le \|A_n\|\,\|x\|_E \le C\|x\|_E$.

Отсюда при $n \to \infty$ получим $\|Ax\|_F \le C\|x\|_E$, то есть оператор A ограниченный и $A \in L(E, F)$.

Покажем, что $\|A_n - A\| \to 0$ при $n \to \infty$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и пусть выполнено (3.1). Тогда для $x \in E$ с $\|x\|_E \le 1$ получим из (3.1) и (3.2)

$$(\forall\, n \ge N)(\forall\, p \in \mathbb{N})\,[\,\|A_{n+p}\,x - A_n\,x\|_F < \varepsilon]\,.$$

В последней оценке $p \to \infty$. Получим для всех $x \in E$ с $\|x\|_E \le 1$ и всех $n \ge N$ оценку $\|Ax - A_n x\|_F \le \varepsilon$. Отсюда для всех $n \ge N$ следует

$$\|A - A_n\| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|_E \le 1}} \|(A - A_n)x\|_F \le \varepsilon\,.$$

Итак,

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall\, n \ge N)\,[\,\|A - A_n\| \le \varepsilon]\,,$$

что означает $A_n \rightrightarrows A$. ♡

Отдельно рассмотрим пространство $L(E, \mathbb{R}^1)$, если пространство E вещественное, и пространство $L(E, \mathbb{C}^1)$, если пространство E комплексное. Оба эти пространства являются пространствами линейных ограниченных функционалов, вещественных или комплексных соответственно. Обозначать эти пространства принято символом E^*. Называют пространство E^* пространством, *сопряженным* к пространству E. Заметим, что всякое сопряженное пространство является полным, так как пространства чисел $\mathbb{R}^1$ и $\mathbb{C}^1$ полные.

Замечание. Если пространства E и F комплексные, то операцию умножения оператора на число иногда определяют формулой $(\lambda A)x = \overline{\lambda}(Ax)$. При этом пространство $L(E, F)$ также будет ЛНП, которое полно, если полно пространство F. Соответственно, будет полно и сопряженное пространство $E^* = L(E, \mathbb{C}^1)$, в котором умножение функционала на число определяется подобным образом $(\lambda f)x = \overline{\lambda}(fx)$. Обратим внимание, что сопряженное пространство E^* иногда определяют как пространство *полулинейных* ограниченных функционалов $f(\alpha x + \beta y) = \overline{\alpha} f(x) + \overline{\beta} f(y)$. При таком определении пространство E^* также полно. Заметим, что в вещественном случае все эти подходы совпадают.

Определим *суперпозицию (произведение)* линейных операторов. Пусть E_1, E_2, E_3 – линейные нормированные пространства. Пусть заданы операторы $A \in L(E_1, E_2)$ и $B \in L(E_2, E_3)$. Определим на E_1 отображение

$$(BA)x = B(Ax)\,.$$

Очевидно, $BA : E_1 \to E_3$ и является линейным оператором. Из оценки

$$\|(BA)x\|_{E_3} = \|B(Ax)\|_{E_3} \le \|B\|\,\|Ax\|_{E_2} \le \|B\|\,\|A\|\,\|x\|_{E_1}$$

следует ограниченность оператора BA и оценка нормы $\|BA\| \le \|B\|\,\|A\|$. Таким образом, оператор $BA \in L(E_1, E_3)$.

Если оператор $A \in L(E)$, то определены операторы $A^n \in L(E)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, можно определять многочлены от операторов, а также операторные ряды, что позволяет определять и некоторые функции от операторов.

Заметим, что вообще операторы $BA \ne AB$ (один из этих операторов может быть не определен). Но и в случае, когда определены оба оператора BA и AB, равенство выполняется не всегда. Например, в пространстве $C[0,1]$ заданы операторы $(Ax)(t) = tx(t)$ и $(Bx)(t) = \int_0^t x(s)\,ds$. Очевидно, что $A, B \in L(C[0,1])$ и

$$ABx(t) = t\int_0^t x(s)\,ds \ne \int_0^t sx(s)\,ds = BAx(t)\,.$$

Если выполняется равенство $AB = BA$, то говорят, что операторы *коммутируют* или перестановочны.

В пространстве $L(E,F)$ определим еще одну сходимость операторов, аналогом которой для функций является поточечная сходимость.

Пусть последовательность операторов $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L(E,F)$ такая, что для некоторого оператора $A \in L(E,F)$ выполняется $\|A_n x - Ax\|_F \to 0$ при $n \to \infty$ для всех $x \in E$. В таком случае говорят, что операторы A_n $(n \in \mathbb{N})$ сходятся к оператору A *сильно*. Факт сильной сходимости операторов при $n \to \infty$ будем обозначать $A_n \xrightarrow{\text{сильно}} A$.

Из неравенства $\|A_n x - Ax\|_F \le \|A_n - A\|\,\|x\|_E$ следует, что из равномерной сходимости операторов следует сильная сходимость. Обратное утверждение неверно, что видно из следующего примера.

Пример 3.1. В пространстве последовательностей l_2 операторы

$$P_n x = (x_1, x_2, ..., x_n, 0, 0, ...), \text{ где } n \in \mathbb{N} \text{ и } x = (x_1, x_2, ..., x_k, ...) \in l_2\,.$$

. Очевидно, что $P_n \in L(l_2)$ и для $x \in l_2$

$$\|Ix - P_n x\| = \|(0, 0, ..., 0, x_{n+1}, x_{n+2}, ...)\| = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^2\right)^{1/2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,.$$

Получили $P_n \xrightarrow{\text{сильно}} I$. Справедлива оценка

$$\|Ix - P_n x\| = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^2\right)^{1/2} \le \|x\|\,,$$

из которой следует $\|I-P_n\| \le 1$. Определим элемент $x_0 = (0, 0, ..., 0, 1, 0, ...)$, где 1 стоит на $n+1$-ом месте. Тогда $\|x_0\| = 1$ и

$$\|I-P_n\| = \sup_{\|x\|=1} \|(I-P_n)x\| \ge \|(I-P_n)x_0\| = \|x_0\| = 1\,.$$

Таким образом, $(\forall n \in \mathbb{N})[\,\|I-P_n\| = 1]$.

Теорема 3.2. *Пусть E, F – линейные нормированные пространства и пространство E конечномерно. Операторы A, $A_n\,(n \in \mathbb{N}) \in L(E,F)$ и выполнено условие $A_n \xrightarrow{\text{сильно}} A$ при $n \to \infty$. Тогда $A_n \rightrightarrows A$.*

Доказательство. Пусть $E = \mathscr{L}(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_m)$, где $\{\omega_k\}_{k=1}^m$ – базис пространства E. Тогда всякий $x \in E$ представим в виде $x = \sum_{k=1}^m x_k\omega_k$, где x_k – координаты элемента x в базисе $\{\omega_k\}$. Определим в E новую норму $\|x\|_E^* = \sum_{k=1}^m |x_k|$. Нормы $\|x\|_E$ и $\|x\|_E^*$ эквивалентны. Тогда

$$(\exists M > 0)(\forall\, x \in E)[\,\|x\|_E^* \le M\|x\|_E].$$

Далее получим для любого $x \in E$ с $\|x\|_E \le 1$

$$\|(A_n - A)x\|_F = \|\sum_{k=1}^m x_k(A_n - A)\omega_k\|_F \le \sum_{k=1}^m |x_k|\,\|(A_n-A)\omega_k\|_F \le$$

$$\le \max_{1\le k\le m} \|(A_n-A)\omega_k\|_F\, \|x\|_E^* \le M \max_{1\le k\le m} \|(A_n-A)\omega_k\|_F$$

В результате получим

$$\|A_n - A\| = \sup_{\|x\|_E\le 1} \|(A_n-A)x\|_F \le M \max_{1\le k\le m} \|(A_n-A)\omega_k\|_F \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,. \quad \heartsuit$$

• Задачи.

3.1. В пространстве l_2 для $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots)$ определены две последовательности операторов:

$$A_n x = (\frac{x_1}{n}, \frac{x_2}{n}, \ldots, \frac{x_k}{n}, \ldots), \quad B_n x = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n}, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots).$$

Каков характер сходимости каждой из последовательностей ?

3.2. Пусть E и F – линейные нормированные пространства; $x, x_n \in E$ $(n \in \mathbb{N})$, и $\|x_n - x\|_E \to 0$ при $n \to \infty$. Пусть $A, A_n \in L(E,F)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и $\|A_n - A\| \to 0$ при $n \to \infty$. Доказать, что $\|A_n x_n - Ax\|_F \to 0$.

§ 4. Принцип равномерной ограниченности

Лемма 4.1. *Пусть E, F – линейные нормированные пространства и множество операторов $\{A_\gamma\} \subset L(E,F)$ такое, что*

$$(\exists B[x_0, r] \subset E,\ r > 0)(\exists C > 0)(\forall\, x \in B[x_0, r])(\forall\, \gamma)[\,\|A_\gamma x\|_F \le C]\,.$$

Тогда для $(\forall\,\gamma)[\,\|A_\gamma\| \le 2C/r]$, *то есть множество операторов* $\{A_\gamma\}$ *равномерно по* γ *ограничено в* $L(E,F)$.

Доказательство. Для произвольного $x \in E$, что $x \ne \Theta$, определим элемент

$$\frac{r}{\|x\|_E}\,x + x_0 \in B[x_0, r]\,.$$

Далее получим

$$C \ge \left\|A_\gamma\!\left(\frac{r}{\|x\|_E}\,x + x_0\right)\right\|_F = \left\|\left(\frac{r}{\|x\|_E}\,A_\gamma x\right) - (-A_\gamma x_0)\right\|_F \ge$$

$$\ge \left\|\frac{r}{\|x\|_E}\,A_\gamma x\right\|_F - \|A_\gamma x_0\|_F \ge \frac{r}{\|x\|_E}\,\|A_\gamma x\|_F - C\,.$$

Отсюда получается необходимая оценка для всех $x \in E$

$$\|A_\gamma x\|_F \le \frac{2C}{r}\,\|x\|_E\,. \qquad \heartsuit$$

Теорема 4.1. *Пусть даны* E *– банахово пространство,* F *– линейное нормированное пространство и операторы* $\{A_\gamma\} \subset L(E,F)$. *Пусть*

$$(\forall\,x \in E)(\exists C \ge 0)(\forall\,\gamma)[\,\|A_\gamma x\|_F \le C]\,.$$

Тогда $(\exists K)(\forall\,\gamma)[\,\|A_\gamma\| \le K]$, *то есть множество операторов* $\{A_\gamma\}$ *равномерно по* γ *ограничено в* $L(E,F)$.

Доказательство. Определим для каждого $n \in \mathbb{N}$ множество

$$S_n = \{x \in E \,|\, (\forall\,\gamma)[\,\|A_\gamma x\|_F \le n]\}\,.$$

Покажем, что $E = \cup_{n=1}^{\infty} S_n$. Включение $\cup_{n=1}^{\infty} S_n \subset E$ очевидно. Возьмем теперь произвольный $x \in E$. Тогда $(\forall\,\gamma)[\,\|A_\gamma x\|_F \le C(x)]$. Выберем $n \ge C(x)$. Тогда $(\forall\,\gamma)[\,\|A_\gamma x\|_F \le n]$, следовательно, $x \in S_n$. Установлено включение $E \subset \cup_{n=1}^{\infty} S_n$. Необходимое равенство доказано.

Покажем, что множества S_n замкнуты, то есть $\overline{S}_n = S_n$. Пусть $y \in \overline{S}_n$ и последовательность $\{y_k\} \subset S_n$ такая, что $\|y_k - y\|_E \to 0$ при $k \to \infty$. Так как $\|A_\gamma y_k\|_F \le n$ и операторы A_γ непрерывные, то при $k \to \infty$ получим $\|A_\gamma y\|_F \le n$. Следовательно, $y \in S_n$, то есть все множества S_n замкнуты.

Поскольку пространство E полное, то по теореме Бэра E есть множество второй категории. Тогда найдется множество S_m, которое не является нигде не плотным, то есть

$$(\exists B(x_0, \varepsilon_0) \subset E)(\forall B(y,\delta) \subset B(x_0, \varepsilon_0))[\,B(y,\delta) \cap S_m \ne \varnothing]\,.$$

Получили $(\forall y \in B(x_0,\varepsilon_0)[y \in \overline{S}_m]$, то есть $B(x_0,\varepsilon_0) \subset \overline{S}_m = S_m$. Далее получим $B[x_0,\varepsilon_0] = \overline{B(x_0,\varepsilon_0)} \subset S_m$. Таким образом, установили

$$(\forall\, x \in B[x_0,\varepsilon_0])(\forall\,\gamma)[\,\|A_\gamma x\|_F \le m]\,.$$

Из леммы 4.1 теперь следует, что $(\forall\,\gamma)[\,\|A_\gamma\| \le 2m/\varepsilon_0]$. ♡

Продемонстрируем одно из применений принципа равномерной ограниченности, установленного в теореме 4.1.

Последовательность операторов $\{A_n\} \subset L(E,F)$ называется *сильно фундаментальной*, если для любого $x \in E$ последовательность $\{A_n x\} \subset F$ фундаментальна. Пространство $L(E,F)$ называется *сильно полным*, если для всякой сильно фундаментальной последовательности $\{A_n\} \subset L(E,F)$ найдется оператор $A \subset L(E,F)$ такой, что $A_n \xrightarrow{\text{сильно}} A$.

Теорема 4.2. *Пусть E, F – банаховы пространства. Тогда пространство $L(E,F)$ сильно полно.*

Доказательства. Возьмем произвольную сильно фундаментальную последовательность $\{A_n\} \subset L(E,F)$. В силу полноты пространства F для всякого $x \in E$ последовательность $\{A_n x\} \subset F$ сходится. Таким образом, как и в теореме 3.1, определен линейный оператор $A : E \to F$, действующий по правилу $Ax = \lim_{n\to\infty} A_n x$.

Покажем ограниченность оператора A. Для каждого $x \in E$ последовательность $\{A_n x\} \subset F$ сходится, а значит ограничена, то есть

$$(\forall\, x \in E)(\exists C \ge 0)(\forall\, n \in \mathbb{N})[\,\|A_n x\|_F \le C]\,.$$

Так как пространство E банахово, то из теоремы 4.1 следует

$$(\exists K \ge 0)(\forall\, n \in \mathbb{N})[\,\|A_n\| \le K]\,.$$

Далее для всех $x \in E$ получим $\|A_n x\|_F \le \|A_n\|\,\|x\|_E \le K\|x\|_E$. Отсюда при $n \to \infty$ следует $\|Ax\|_F \le K\|x\|_E$.

Итак, оператор $A \in L(E,F)$ и по определению этого оператора $A_n x \to Ax$ при $n \to \infty$ для любого $x \in E$. Получили $A_n \xrightarrow{\text{сильно}} A$. ♡

• Задача.

4.1. Пусть E – банахово пространство и F – линейное нормированное пространство. Пусть $A, A_n \in L(E,F)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и операторы A_n при $n \to \infty$ сильно сходятся к оператору A. Пусть $x, x_n \in E$ и $\|x_n - x\|_E \to 0$ при $n \to \infty$. Доказать, что $\|A_n x_n - Ax\|_F \to 0$.

§ 5. Продолжение оператора по непрерывности

Теорема 5.1. *Пусть E – линейное нормированное пространство и F – банахово пространство. Линейный оператор $A : D(A) \subset E \to F$ ограничен на своей области определения $D(A)$ и множество $D(A)$ плотно в E. Тогда существует оператор $\widetilde{A} \in L(E, F)$ такой, что:*

$$1) \quad (\forall x \in D(A))[\,\widetilde{A}x = Ax]\,, \qquad 2) \quad \|\widetilde{A}\| = \|A\|\,.$$

Доказательство. Возьмем произвольный $x \in E$. Так как $\overline{D(A)} = E$, то найдется последовательность $\{x_n\} \subset D(A)$ такая, что $x_n \to x$ при $n \to \infty$. Рассмотрим последовательность $\{Ax_n\} \subset F$. Для всех $n, m \in \mathbb{N}$ элементы $x_n - x_m \in D(A)$ и справедлива оценка

$$\|Ax_n - Ax_m\|_F \le \|A\|\,\|x_n - x_m\|_E\,,$$

из которой следует фундаментальность последовательности $\{Ax_n\} \subset F$. Поскольку пространство F полное, то последовательность $\{Ax_n\}$ сходится, то есть существует $\lim_{n\to\infty} Ax_n = y(x) \in F$.

Покажем, что элемент $y(x) \in F$ не зависит от выбора последовательности $\{x_n\} \subset D(A)$. Пусть имеем также последовательность $\{x'_n\} \subset D(A)$ такую, что $x'_n \to x$ при $n \to \infty$. Обозначим $\lim_{n\to\infty} Ax_n = a$ и $\lim_{n\to\infty} Ax'_n = b$. Тогда

$$\|a - b\|_F \le \|a - Ax_n\|_F + \|Ax_n - Ax'_n\|_F + \|Ax'_n - b\|_F \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,,$$

так как $\|Ax_n - Ax'_n\|_F \le \|A\|\,\|x_n - x'_n\|_E \to 0$ при $n \to \infty$.

Таким образом, на $x \in E$ однозначно определен линейный оператор

$$\widetilde{A}x = y(x) = \lim_{n\to\infty} Ax_n\,.$$

Линейность оператора $\widetilde{A}$ следует из линейности оператора A и соответствующих свойств предела.

Покажем выполнение свойства 1). Если $x \in D(A)$, то при построении последовательности $\{x_n\}$ можно брать все $x_n = x$. Тогда

$$\widetilde{A}x = \lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} Ax = Ax\,.$$

Покажем выполнение свойства 2). Пусть $x \in E$ и последовательность $\{x_n\} \subset D(A)$ такая, что $x_n \to x$ при $n \to \infty$. Из оценки $\|Ax_n\|_F \le \|A\|\,\|x_n\|_E$ при $n \to \infty$ получим $\|\widetilde{A}x\|_F \le \|A\|\,\|x\|_E$. Таким образом, $\widetilde{A} \in L(E, F)$ и $\|\widetilde{A}\| \le \|A\|$.

Получим обратную оценку.

$$\|\widetilde{A}\| = \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|_E=1}} \|\widetilde{A}x\|_F \geq \sup_{\substack{x\in D(A)\\ \|x\|_E=1}} \|\widetilde{A}x\|_F = \sup_{\substack{x\in D(A)\\ \|x\|_E=1}} \|Ax\|_F = \|A\|\,.$$

Итак, $\|\widetilde{A}\| = \|A\|$. ♡

Построенный оператор $\widetilde{A}$ называют *продолжением оператора A по непрерывности на все пространство.*

• Задача.

5.1. Пусть H – гильбертово пространство и $M \subset H$ – линейное многообразие. Пусть A – линейный ограниченный оператор, заданный на M со значениями в банаховом пространстве E. Показать, что оператор A можно продолжить на все пространство H с сохранением нормы.

§ 6. Обратимый и обратный операторы

Пусть E, F – линейные нормированные пространства и A – линейный (возможно неограниченный) оператор из E в F, область определения $D(A) \subset E$ и множество значений $R(A) \subset F$, то есть $A : D(A) \subset E \to R(A) \subset F$.

Оператор A называется *обратимым*, если

$$(\forall\, y \in R(A))(\exists\, x \in D(A) \text{ единственный})[\, Ax = y]\,.$$

Таким образом, в случае обратимого оператора A определено отображение A^{-1} из F в E с областью определения $D(A^{-1}) = R(A)$ и множеством значений $R(A^{-1}) = D(A)$ такое, что для $y \in R(A)$ определен $A^{-1}y = x$, где $x \in D(A)$ такой единственный, что $Ax = y$.

Теорема 6.1. *Пусть E, F – линейные нормированные пространства. Отображение A^{-1}, определенное по линейному обратимому оператору $A : D(A) \subset E \to R(A) \subset F$, является линейным оператором.*

Доказательство. Напомним, что $D(A)$ и $R(A)$ являются линейными многообразиями в пространствах E и F соответственно.

Пусть выбраны элементы $y_1, y_2 \in R(A)$ и числа α_1, α_2. Обозначим

$$x_1 = A^{-1}y_1 \in D(A)\,, \quad x_2 = A^{-1}y_2 \in D(A)\,.$$

В силу линейности и обратимости оператора A получим

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2\,.$$

Из определения отображения A^{-1} следует

$$A^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_1 A^{-1}y_1 + \alpha_2 A^{-1}y_2\,. \qquad ♡$$

Линейный оператор A^{-1}, определенный по линейному обратимому оператору A, называется оператором *обратным* к оператору A.

Из определения оператора A^{-1} следует, что

$$(\forall\, y \in R(A))[\, AA^{-1}y = y]\,, \qquad (\forall\, x \in D(A))[\, A^{-1}Ax = x]\,.$$

Для линейного оператора A определим множество

$$N(A) = \{x \in D(A) \,|\, Ax = \Theta\}\,,$$

называемое *ядром* или *нуль-многообразием* оператора A. Нетрудно видеть, что $N(A)$ – линейное многообразие в пространстве E.

Теорема 6.2. *Пусть E, F - линейные нормированные пространства и $A : D(A) \subset E \to F$ линейный оператор. Оператор A обратим тогда и только тогда, когда $N(A) = \{\Theta\}$.*

Доказательство. Если оператор A обратим, то уравнение $Ax = \Theta \in R(A)$ имеет единственное решение $x = A^{-1}\Theta = \Theta \in D(A)$, то есть $N(A) = \{\Theta\}$.

Пусть теперь $N(A) = \{\Theta\}$. Предположим для $y \in R(A)$ существуют $x_1, x_2 \in D(A)$ такие, что $Ax_1 = y$ и $Ax_2 = y$. Тогда $A(x_1 - x_2) = \Theta$, что означает $x_1 - x_2 \in N(A)$. Следовательно, $x_1 = x_2$. Итак, элемент $x \in D(A)$ такой, что $Ax = y$ единственный. Значит оператор A обратим. ♡

Теорема 6.3. *Пусть E, F - линейные нормированные пространства и $A : D(A) \subset E \to F$ линейный оператор. Оператор A обратим и оператор A^{-1} ограничен на $R(A)$ тогда и только тогда, когда*

$$(\exists\, m > 0)(\forall\, x \in D(A))[\, \|Ax\|_F \geq m\|x\|_E]\,. \tag{6.1}$$

Доказательство. Пусть оператор A обратим и оператор A^{-1} ограничен на $R(A)$. Тогда

$$(\exists C > 0)(\forall\, y \in R(A))[\, \|A^{-1}y\|_E \leq C\|y\|_F]\,.$$

Возьмем произвольный $x \in D(A)$ и пусть $y = Ax \in R(A)$. Тогда $x = A^{-1}y$ и $\|x\|_E \leq C\|Ax\|_F$. Следовательно,

$$(\exists C > 0)(\forall\, x \in D(A))[\, \|Ax\|_F \geq \frac{1}{C}\|x\|_E]\,.$$

Пусть теперь выполнено (6.1), из которого сразу следует $N(A) = \{\Theta\}$, то есть оператор A обратим и существует обратный A^{-1}. Покажем ограниченность на $R(A)$ обратного оператора. Возьмем $y \in R(A)$ и $x = A^{-1}y \in D(A)$. Тогда из (6.1) $\|Ax\|_F \geq m\|x\|_E$. Но $Ax = y$, поэтому $\|y\|_F \geq m\|A^{-1}y\|_E$. Получили ограниченность на $R(A)$ оператора A^{-1} и $\|A^{-1}\| \leq 1/m$. ♡

Пусть E, F – линейные нормированные пространства и линейный оператор $A : D(A) \subset E \to F$. Оператор A называется *непрерывно обратимым*, если оператор A обратим и обратный $A^{-1} \in L(F, E)$.

Лемма 6.1. *Пусть E, F – линейные нормированные пространства. Оператор $A \in L(E, F)$, и пусть существует оператор $B \in L(F, E)$ такой, что $BA = I_E$ и $AB = I_F$ (операторы I_E и I_F тождественные на E и F соответственно). Тогда оператор A непрерывно обратим и $A^{-1} = B$.*

Доказательство. Пусть элемент $x \in N(A)$, то есть $Ax = \Theta$. Следовательно, $x = I_E x = BAx = B\Theta = \Theta$. Получили $N(A) = \{\Theta\}$ и оператор A обратим.

Возьмем $y \in F$. Тогда $y = I_F y = ABy = A(By) \in R(A)$, то есть $R(A) = F$. Рассмотрим $A^{-1}y = A^{-1}ABy = By$. Следовательно, $A^{-1} = B \in L(F, E)$. ♡

Теорема 6.4. *Пусть E – банахово пространство и оператор $A \in L(E)$ такой, что $\|A\| \leq q < 1$. Тогда оператор $I - A$ непрерывно обратим. Справедливо представление $(I-A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$ и оценка $\|(I-A)^{-1}\| \leq (1-q)^{-1}$.*

Доказательство. Рассмотрим в $L(E)$ операторный ряд $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$, где оператор $A^0 = I$. Этот ряд сходится абсолютно, так как $\|A^k\| \leq \|A\|^k \leq q^k$, а числовой ряд $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ сходится. Так как $L(E)$ банахово пространство, то в $L(E)$ сходится и ряд $\sum_{k=0}^{\infty} A^k = S \in L(E)$.

Обозначим $\sum_{k=0}^{n} A^k = S_n \in L(E)$. Заметим, что $S_n(I - A) = I - A^{n+1}$. В последнем равенстве переходим к пределу при $n \to \infty$. Так как при $n \to \infty$

$$\|I - (I - A^{n+1})\| = \|A^{n+1}\| \leq q^{n+1} \to 0\,,$$

$$\|S(I - A) - S_n(I - A)\| \leq \|S - S_n\|\,\|I - A\| \to 0\,,$$

то в пределе получим $S(I - A) = I$. Аналогично доказывается $(I - A)S = I$.

Из леммы 6.1 теперь следует непрерывная обратимость оператора $I - A$ и $(I - A)^{-1} = S \in L(E)$. Получим необходимую оценку

$$\|(I - A)^{-1}\| = \|S\| = \lim_{n\to\infty} \|S_n\| \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \|A^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} q^k = (1 - q)^{-1}\,. \quad ♡$$

Замечание. Более сильное утверждение получается , если вместо условия $\|A\| \leq q < 1$, обеспечивающего сходимость ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k$, воспользоваться признаком Коши сходимости этого ряда $\lim_{k\to\infty} \|A^k\|^{1/k} < 1$. Известно (напр.,[8]), что такой предел $r(A) = \lim_{k\to\infty} \|A^k\|^{1/k}$ существует и называется *спектральным радиусом* оператора A. Из определения спектрального радиуса $r(A)$ видно, что $r(A) \leq \|A\|$.

Следствие 6.1. *Пусть E – банахово пространство, оператор $A \in L(E)$ и его спектральный радиус $r(A) < 1$. Тогда оператор $I - A$ непрерывно обратим и справедливо представление $(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$.*

• Задачи.

6.1. В пространстве l_2 рассмотрим операторы A и B, переводящие элементы $x = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots)$ в $Ax = (0, x_1, x_2, \dots)$ и $Bx = (x_2, x_3, \dots)$ соответственно. Являются ли операторы A и B обратимыми ?

6.2. Рассмотрим оператор $A : C[0,1] \to C[0,1]$, заданный выражением

$$Ax(t) = \int_0^t x(s)\, ds.$$

а) Что представляет собой $R(A)$?

б) Существует ли обратный оператор и ограничен ли он ?

6.3. Показать, что соответствующие операторы $A : C[0,1] \to C[0,1]$ непрерывно обратимы и найти обратные:

$$\text{а)}\quad Ax(t) = x(t) + \int_0^t x(s)\, ds; \qquad \text{б)}\quad Ax(t) = x(t) - \int_0^1 tsx(s)\, ds;$$

$$\text{в)}\quad Ax(t) = x(t) + \int_0^1 \exp(t+s)x(s)\, ds.$$

6.4. Пусть E – линейное нормированное пространство и $A : E \to E$ такой линейный оператор, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} A^k x$ сходится для всех $x \in E$.

а) Доказать, что оператор $I - A$ обратим.

б) Пусть, кроме того, $A \in L(E)$. Доказать, что тогда для любого $x \in E$ выполнено $(I - A)^{-1}x = \sum_{k=0}^{\infty} A^k x$.

6.5. Пусть E – банахово пространство, оператор $A \in L(E)$ и $\|I - A\| < 1$. Доказать, что оператор A непрерывно обратим.

6.6. Пусть E – банахово пространство. Доказать, что в пространстве $L(E)$ множество всех непрерывно обратимых операторов открыто.

§ 7. Теорема Банаха об обратном операторе

Теорема 7.1(Банах). *Пусть E, F – банаховы пространства. Пусть оператор $A \in L(E,F)$ такой, что $N(A) = \{\Theta\}$ и $R(A) = F$. Тогда оператор A непрерывно обратим, то есть существует $A^{-1} \in L(F,E)$.*

Обратим внимание, что существование оператора $A^{-1} : F \to E$ очевидно, так как $N(A) = \{\Theta\}$. Следует установить ограниченность оператора A^{-1}.

Рассмотрим прежде вспомогательную лемму, при доказательстве которой существенно используются три простых факта, которые сформулируем в виде задач.

• Задачи.

7.1. Пусть E – линейное нормированное пространство и множество $M \subset E$. Тогда $(\forall \lambda$ – числа$)[\, \lambda\overline{M} = \overline{\lambda M}]$.

7.2. Пусть E – линейное нормированное пространство и шар $B[x, r] \subset E$. Тогда $(\forall\, \lambda$ – числа$)[\, \lambda B[x, r] = B[\lambda x, |\lambda| r]\,]$.

7.3. Пусть E – линейное нормированное пространство и шар $B[x, r] \subset E$. Тогда $B[x, r] - B[x, r] = B[\Theta, 2r]$.

Лемма 7.1. *Пусть E – банахово пространство и F – линейное нормированное пространство. Пусть задан линейный оператор $T : E \to F$ (возможно неограниченный). Определим множество $S = \{x \in E |\, \|Tx\|_F \leq 1\}$. Тогда*

$$(\exists\, c > 0)(\forall\, r > 0)[\, B[\Theta, r] \subset \overline{rcS}\,].$$

Доказательство. Для $k \in \mathbb{N}$ определим множества $kS = \{kx |\, x \in S\}$. Покажем, что $E = \cup_{k=1}^{\infty} kS$. Включение $\cup_{k=1}^{\infty} kS \subset E$ очевидно. Установим обратное включение. Пусть $x \in E$. Тогда $(\exists\, k \in \mathbb{N})[\, \|Tx\|_F \leq k]$. Заметим, что $\|T(x/k)\|_F \leq 1$, то есть $x/k \in S$. Следовательно, $x = k(x/k) \in kS$. Установили $E \subset \cup_{k=1}^{\infty} kS$.

Так как пространство E банахово, то E есть множество второй категории, следовательно найдется множество $mS\, (m \in \mathbb{N})$, которое не является нигде не плотным. Таким образом,

$$(\exists B(x_0, r_0) \subset E)(\forall B(x, \varepsilon) \subset B(x_0, r_0))[\, B(x, \varepsilon) \cap mS \neq \varnothing]\,.$$

Итак, шар $B(x_0, r_0) \subset \overline{mS}$. Отсюда следует $B[x_0, r_0] \subset \overline{mS} = m\overline{S}$ (задача 7.1). Далее получим (задача 7.2)

$$B\left[\frac{x_0}{m}, \frac{r_0}{m}\right] = \frac{1}{m} B[x_0, r_0] \subset \frac{1}{m}(m\overline{S}) = \overline{S}\,.$$

Воспользуемся теперь задачей 7.3

$$B\left[\Theta, 2\,\frac{r_0}{m}\right] = B\left[\frac{x_0}{m}, \frac{r_0}{m}\right] - B\left[\frac{x_0}{m}, \frac{r_0}{m}\right] \subset \overline{S} - \overline{S}\,.$$

Установим теперь, что $\overline{S} - \overline{S} \subset 2\overline{S}$. Пусть элемент $z \in \overline{S} - \overline{S}$, то есть $z = x - y$, где $x, y \in \overline{S}$. Возьмем последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\} \subset S$ такие, что $x_n \to x$ и $y_n \to y$ при $n \to \infty$. Тогда $z_n = x_n - y_n \to x - y = z$. Рассмотрим

$$\|Tz_n\|_F = \|Tx_n - Ty_n\|_F \leq \|Tx_n\|_F + \|Ty_n\|_F \leq 1 + 1 = 2\,.$$

В таком случае, $z_n \in 2S$. Но тогда $z \in \overline{2S} = 2\overline{S}$. Получили $B[\Theta,\, 2r_0/m] \subset 2\overline{S}$.

Далее рассмотрим шар

$$B[\Theta, 1] = \frac{m}{2r_0} B\left[\Theta, \frac{2r_0}{m}\right] \subset \frac{m}{2r_0}\, 2\overline{S} = \frac{m}{r_0}\overline{S}\,.$$

Обозначим $m/r_0 = c$. Итак, $B[\Theta, 1] \subset c\overline{S}$.

Теперь возьмем произвольное $r > 0$ и получим

$$B[\Theta, r] = rB[\Theta, 1] \subset rc\overline{S} = \overline{rcS}\,. \qquad \heartsuit$$

Доказательство теоремы 7.1. Как отмечалось выше, определен оператор $A^{-1} : F \to E$. Определим множество $P = \{y \in F \,|\, \|A^{-1}y\|_E \le 1\}$. Возьмем произвольный шар $B[\Theta, r] \subset F$. Так как пространство F банахово, то по лемме 7.1

$$(\exists\, c > 0)(\forall\, r > 0)[\, B[\Theta, r] \subset \overline{rcP}\,]\,.$$

Пусть $y \in B[\Theta, 1] \subset F$. Так как $B[\Theta, 1] \subset \overline{cP}$, то найдется $y_1 \in cP$, что $\|y - y_1\|_F < 2^{-1}$. Так как $y - y_1 \in B[\Theta, 2^{-1}] \subset \overline{2^{-1}cP}$, то найдется $y_2 \in 2^{-1}cP$, что $\|(y - y_1) - y_2\|_F < 2^{-2}$. Элемент $y - y_1 - y_2 \in B[\Theta, 2^{-2}] \subset \overline{2^{-2}cP}$, поэтому найдется $y_3 \in 2^{-2}cP$, что $\|(y - y_1 - y_2) - y_3\|_F < 2^{-3}$ и так далее.

По построению для всех $i \in \mathbb{N}$ элементы $y_i \in 2^{1-i}cP$, следовательно, $\|A^{-1}y_i\|_E \le c2^{1-i}$. Кроме того, $\|y - \sum_{i=1}^{k} y_i\|_F < 2^{-k} \to 0$ при $k \to \infty$. Следовательно, $y = \sum_{i=1}^{\infty} y_i$.

Обозначим $x_i = A^{-1}y_i$. Рассмотрим в E ряд $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$. Этот ряд абсолютно сходится, так как $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|_E \le c\sum_{i=1}^{\infty} 2^{1-i} = 2c$. Пространство E банахово, поэтому $\sum_{i=1}^{\infty} x_i = x \in E$. В силу непрерывности оператора A получим

$$Ax = \sum_{i=1}^{\infty} Ax_i = \sum_{i=1}^{\infty} y_i = y\,.$$

В таком случае, $x = A^{-1}y$ и

$$\|A^{-1}y\|_E = \|x\|_E = \|\sum_{i=1}^{\infty} x_i\|_E \le \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|_E \le 2c\,.$$

Из последней оценки следует $\|A^{-1}\| \le 2c$, то есть $A^{-1} \in L(F, E)$. ♡

• Задача.

7.4. Пусть на линейном пространстве E заданы две нормы: $\|x\|_1$ и $\|x\|_2$. По отношению к каждой из них E полное пространство. Предположим, что $(\exists c > 0)(\forall x \in E)(\|x\|_1 \le c\|x\|_2)$. Доказать, что нормы $\|x\|_1$ и $\|x\|_2$ эквивалентны.

§ 8. Резольвента и спектр линейного оператора

Пусть E – комплексное линейное нормированное пространство и задан линейный оператор $A : D(A) \subset E \to E$. Для числа $\lambda \in \mathbb{C}^1$ рассмотрим оператор $A - \lambda I$. Если оператор $A - \lambda I$ непрерывно обратим, то есть существует обратный оператор $(A - \lambda I)^{-1} \in L(E)$, то оператор $(A - \lambda I)^{-1} = R(A, \lambda)$ называется *резольвентой* оператора A, а соответствующее значение λ называется *регулярным значением* оператора A. Множество всех регулярных значений оператора A обозначают $\rho(A)$. Множество чисел $\mathbb{C}^1 \setminus \rho(A) = \sigma(A)$ называется *спектром* оператора A.

Числа $\lambda \in \sigma(A)$ такие, что $N(A - \lambda I) \neq \{\Theta\}$ называются *собственными значениями* оператора A. Соответствующие элементы $x \in E$ $(x \neq \Theta)$ такие, что $(A - \lambda I)x = \Theta$ или $Ax = \lambda x$, называются *собственными элементами.*

Теорема 8.1. *Пусть E – комплексное банахово пространство и оператор $A \in L(E)$. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}^1$ такое, что $|\lambda| > \|A\|$. Тогда $\lambda \in \rho(A)$ и резольвента $R(A, \lambda)$ представима в виде*

$$R(A, \lambda) = (A - \lambda I)^{-1} = -\frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\lambda^k}\,, \quad \text{где} \quad A^0 = I\,. \tag{8.1}$$

Доказательство. Так как $|\lambda| > 0$, то рассмотрим оператор $A - \lambda I = -\lambda(I - \lambda^{-1}A)$. Заметим, что $\|\lambda^{-1}A\| < 1$, поэтому по теореме 6.4 существует обратный оператор

$$(I - \lambda^{-1}A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda^{-1}A)^k \in L(E)\,.$$

Осталось показать, что $(A - \lambda I)^{-1} = -\lambda^{-1}(I - \lambda^{-1}A)^{-1}$. Для этого заметим, что

$$(A - \lambda I)[-\lambda^{-1}(I - \lambda^{-1}A)^{-1}] = I\,, \quad [-\lambda^{-1}(I - \lambda^{-1}A)^{-1}](A - \lambda I) = I$$

и воспользуемся леммой 6.1. ♡

Следствие 8.1. *Пусть E – комплексное банахово пространство и оператор $A \in L(E)$. Если число $\lambda \in \sigma(A)$, то $|\lambda| \le \|A\|$.*

Замечание. По признаку Коши ряд $\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda^{-1}A)^k$ сходится абсолютно, если

$$\lim_{k\to\infty} \left\| \left(\frac{A}{\lambda}\right)^k \right\|^{1/k} = \frac{r(A)}{|\lambda|} < 1\,,$$

где $r(A)$ – спектральный радиус оператора A. Так как $r(A) \le \|A\|$, то доказанные выше теорему 8.1 и следствие 8.1 можно уточнить.

Теорема 8.1′. *Пусть E – комплексное банахово пространство и оператор $A \in L(E)$. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}^1$ такое, что $|\lambda| > r(A)$. Тогда $\lambda \in \rho(A)$ и резольвента $R(A, \lambda)$ представима в виде (8.1).*

Следствие 8.1′. *Пусть E – комплексное банахово пространство и оператор $A \in L(E)$. Если число $\lambda \in \sigma(A)$, то $|\lambda| \le r(A)$.*

Теорема 8.2 *Пусть E – комплексное банахово пространство и оператор $A \in L(E)$. Тогда множество регулярных значений $\rho(A) \subset \mathbb{C}^1$ открыто.*

Доказательство. Возьмем произвольное $\lambda_0 \in \rho(A)$. Тогда существует оператор $(A - \lambda_0 I)^{-1} \in L(E)$. Рассмотрим для $\lambda \in \mathbb{C}^1$ оператор

$$A - \lambda I = A - \lambda_0 I - (\lambda - \lambda_0) I = (A - \lambda_0 I)[I - (\lambda - \lambda_0)(A - \lambda_0 I)^{-1}] .$$

Потребуем от $\lambda \in \mathbb{C}^1$ выполнения условия $|\lambda - \lambda_0| < \|(A - \lambda_0 I)^{-1}\|^{-1}$. Тогда $\|(\lambda - \lambda_0)(A - \lambda_0 I)^{-1}\| < 1$ и по теореме 6.4 существует оператор

$$[I - (\lambda - \lambda_0)(A - \lambda_0 I)^{-1}]^{-1} \in L(E) .$$

Воспользовавшись леммой 6.1, нетрудно показать, что тогда существует оператор

$$(A - \lambda I)^{-1} = [I - (\lambda - \lambda_0)(A - \lambda_0 I)^{-1}]^{-1} (A - \lambda_0 I)^{-1} \in L(E) .$$

Таким образом, для чисел λ из некоторой окрестности числа λ_0 оператор $A - \lambda I$ непрерывно обратим. Следовательно, множество $\rho(A)$ открыто. ♡

Следствие 8.2. *Пусть E – комплексное банахово пространство и оператор $A \in L(E)$. Тогда множество $\sigma(A) \subset \mathbb{C}^1$ замкнуто.*

• Задачи.

8.1. Пусть $\{e_k\}_{k=1}^n$ – базис в линейном пространстве E. Определим оператор $A : E \to E$ равенствами: $Ae_1 = \Theta, \quad Ae_{k+1} = e_k, \quad k = 1, 2, \dots, n-1$. Покажите, что $\lambda = 0$ единственное собственное значение оператора A.

8.2. В пространстве $C[0, 1]$ рассмотрим оператор $Ax(t) = tx(t)$. Доказать, что его спектр $\sigma(A) = [0, 1]$, причем ни одна точка спектра не является собственным значением.

8.3. Найти $\sigma(A)$ и $R(\lambda, A)$ (резольвенту) оператора A из задачи 6.2.

8.4. Пусть в $C[0, 1]$ задан оператор дифференцирования $Ax(t) = x'(t)$. Показать, что:

а) $\sigma(A) = \varnothing$, если $D(A) = \{x(t) | \, (x' \in C[0, 1]) \wedge (x(0) = 0)\}$;

б) $\sigma(A)$ состоит из одних собственных значений, заполняющих всю комплексную плоскость, если $D(A) = \{x(t) | \, x' \in C[0, 1]\}$;

в) $\sigma(A)$ состоит из собственных значений вида $2\pi i k$ ($k \in \mathbb{Z}$, i – мнимая единица), если $D(A) = \{x(t) | \, (x' \in C[0, 1]) \wedge (x(0) = x(1))\}$.

8.5. Показать, что линейный оператор $A : E \to E$, где E – линейное нормированное пространство, и его резольвента коммутируют.

8.6. Пусть E – линейное нормированное пространство и линейные операторы $A, B : E \to E$. Доказать, что для того чтобы A и B коммутировали, необходимо, чтобы B коммутировал с $R(\lambda, A)$ для любого $\lambda \in \rho(A)$, и достаточно, чтобы B и $R(\lambda, A)$ коммутировали хотя бы для одного $\lambda \in \rho(A)$.

8.7. Пусть E – линейное нормированное пространство, оператор $A \in L(E)$ и непрерывно обратим. Доказать, что если $\lambda \in \sigma(A^{-1})$, то $\lambda^{-1} \in \sigma(A)$; обратно, если $\mu \in \sigma(A)$, то $\mu^{-1} \in \sigma(A^{-1})$.

§ 9. Замкнутые операторы

Пусть E, F – линейные нормированные пространства и линейный оператор $A : D(A) \subset E \to F$. Оператор A называется *замкнутым*, если

$$(\forall \{x_n\} \subset D(A))[(x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0) \wedge (Ax_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y_0) \Rightarrow (x_0 \in D(A)) \wedge (Ax_0 = y_0)] .$$

Заметим, что всякий оператор $A \in L(E, F)$ замкнут, так как он непрерывен. В случае, когда $D(A) \neq E$, даже для ограниченного оператора дело обстоит сложнее.

Теорема 9.1. *Пусть E, F – линейные нормированные пространства и линейный оператор $A : D(A) \subset E \to F$ ограничен на $D(A)$. Для замкнутости оператора A достаточно, а в случае F банахова пространства и необходимо, чтобы множество $D(A)$ было замкнуто в E.*

Доказательство. Начнем с достаточности. Пусть оператор A ограничен на $D(A)$ и множество $D(A)$ замкнуто. Пусть последовательность $\{x_n\} \subset D(A)$ такая, что $x_n \to x_0$ и $Ax_n \to y_0$ при $n \to \infty$. В силу замкнутости $D(A)$ элемент $x_0 \in D(A)$. Оператор A непрерывен на $D(A)$, поэтому $Ax_n \to Ax_0$ при $n \to \infty$. Следовательно, $Ax_0 = y_0$. Итак, оператор A замкнутый.

Переходим к доказательству необходимости. Пусть оператор A ограничен на $D(A)$, замкнут и F – банахово пространство. Покажем замкнутость множества $D(A)$. Возьмем элемент $x_0 \in \overline{D(A)}$. Тогда найдется последовательность $\{x_n\} \subset D(A)$ такая, что $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$. Для $n, m \in \mathbb{N}$ элементы $x_n - x_m \in D(A)$, поэтому $\|Ax_n - Ax_m\|_F \le C\|x_n - x_m\|_E$. Отсюда следует фундаментальность последовательности $\{Ax_n\} \subset F$. Тогда, учитывая полноту F, получим $Ax_n \to y_0 \in F$. Из условия замкнутости оператора A следует $x_0 \in D(A)$, то есть множество $D(A)$ замкнуто. ♡

Пример 9.1. Укажем неограниченный замкнутый оператор.

В пространстве $C[0, 1]$ рассмотрим неограниченный оператор из примера 2.2: $Ax(t) = x'(t)$ с областью определения $D(A) = C^1[0, 1] \subset C[0, 1]$. Пусть последовательность функций $\{x_n\} \subset D(A)$ такая, что выполняется $x_n \to x_0$ и $Ax_n = x_n' \to y_0$ при $n \to \infty$ (сходимости по норме $C[0,1]$). По формуле Ньютона-Лейбница

$$x_n(t) = x_n(0) + \int_0^t x_n'(s)\,ds\,. \tag{9.1}$$

В равенстве (9.1) $n \to \infty$. Поскольку из сходимости по норме пространства $C[0,1]$ (равномерной) следует поточечная сходимость, получим $x_n(t) \to x_0(t)$ и $x_n(0) \to x_0(0)$. Соответствующая сходимость интегралов следует из оценки

$$\left|\int_0^t x_n'(s)\,ds - \int_0^t y_0(s)\,ds\right| \le \int_0^1 |x_n'(s) - y_0(s)|\,ds \le \|x_n' - y_0\|\,.$$

Таким образом, из (9.1) получаем равенство

$$x_0(t) = x_0(0) + \int_0^t y_0(s)\,ds\,. \tag{9.2}$$

Из (9.2) следует, что функция $x_0 \in C^1[0,1] = D(A)$ и $Ax_0(t) = x_0'(t) = y_0(t)$, то есть $Ax_0 = y_0$. Замкнутость оператора A установлена.

Теорема 9.2. *Пусть E, F – линейные нормированные пространства и оператор $A : D(A) \subset E \to F$ замкнут и обратим. Тогда обратный оператор $A^{-1} : D(A^{-1}) \subset F \to E$ замкнут.*

Доказательство. Напомним, что $D(A^{-1}) = R(A) \subset F$ и $R(A^{-1}) = D(A) \subset E$. Возьмем последовательность $\{y_n\} \subset R(A)$ такую, что $\|y_n - y_0\|_F \to 0$ и $\|A^{-1}y_n - x_0\|_E \to 0$ при $n \to \infty$. Заметим, $A^{-1}y_n = x_n \in D(A)$ и $y_n = Ax_n$. Следовательно, $\|x_n - x_0\|_E \to 0$ и $\|Ax_n - y_0\|_F \to 0$. Так как по условию оператор A замкнут, то $x_0 \in D(A)$ и $y_0 = Ax_0$. Таким образом, $y_0 \in R(A) = D(A^{-1})$ и $A^{-1}y_0 = x_0$, то есть оператор A^{-1} замкнутый. ♡

Следствие 9.1. *Пусть E, F – линейные нормированные пространства и оператор $A : D(A) \subset E \to F$ непрерывно обратим. Тогда оператор A замкнут.*

Доказательство. Обратный оператор $A^{-1} \in L(F, E)$ и, следовательно, замкнут. Оператор $A = (A^{-1})^{-1}$, то есть обратный к замкнутому, и потому замкнут. ♡

Свойство замкнутости линейного оператора тесно связано с замкнутостью его графика.

Пусть E, F – линейные нормированные пространства. Рассмотрим множество

$$E \times F = \{(x, y)|\,(x \in E) \wedge (y \in F)\}\,.$$

Определим на $E \times F$ линейные операции

$$\alpha_1(x_1, y_1) + \alpha_2(x_2, y_2) = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)\,.$$

Тогда $E \times F$ становится линейным пространством с нулевым элементом $\Theta = (\Theta, \Theta) \in E \times F$. Превратим $E \times F$ в нормированное пространство, задав норму

$$\|(x, y)\|_{E\times F} = \|x\|_E + \|y\|_F\,.$$

Нетрудно доказать, что для случая банаховых пространств E и F пространство $E \times F$ также будет банаховым.

Пусть теперь задан линейный оператор $A : D(A) \subset E \to F$. Определим в $E \times F$ множество

$$\Gamma(A) = \{(x, Ax)|\, x \in D(A)\} \subset E \times F\,,$$

которое называется *графиком* оператора A. Легко проверить, что множество $\Gamma(A)$ есть линейное многообразие в $E \times F$.

Теорема 9.3. *Пусть E, F - линейные нормированные пространства и $A : D(A) \subset E \to F$ линейный оператор. Множество $\Gamma(A)$ замкнуто в $E\times F$ тогда и только тогда, когда оператор A замкнут.*

Доказательство. Предположим, что множество $\Gamma(A)$ замкнуто в $E \times F$. Возьмем последовательность $\{x_n\} \subset D(A)$ такую, что $x_n \to x_0$ и $Ax_n \to y_0$ при $n \to \infty$. Тогда

$$\|(x_n, Ax_n) - (x_0, y_0)\|_{E\times F} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,. \tag{9.3}$$

Элементы $(x_n, Ax_n) \in \Gamma(A)$, поэтому $(x_0, y_0) \in \overline{\Gamma(A)} = \Gamma(A)$. Следовательно, $x_0 \in D(A)$ и $y_0 = Ax_0$. Таким образом, оператор A замкнут.

Теперь предположим, что замкнут оператор A. Возьмем точку прикосновения $(x_0, y_0) \in \overline{\Gamma(A)}$. Тогда существует последовательность $\{x_n\} \subset D(A)$ такая, что выполнено (9.3). Следовательно, $x_n \to x_0$ и $Ax_n \to y_0$ при $n \to \infty$. Так как оператор A замкнут, то $x_0 \in D(A)$ и $y_0 = Ax_0$. Таким образом, $(x_0, y_0) = (x_0, Ax_0) \in \Gamma(A)$ и множество $\Gamma(A)$ замкнуто. ♡

Теорема 9.4. *Пусть E, F – банаховы пространства. Пусть линейный оператор $A : E \to F$ замкнут. Тогда оператор $A \in L(E, F)$.*

Доказательство. Рассмотрим график оператора $\Gamma(A) = \{(x, Ax)|\, x \in E\}$, который по теореме 9.3 является замкнутым линейным многообразием (подпространством) банахова пространства $E \times F$. Тогда $\Gamma(A)$ с нормой

$$\|(x, Ax)\|_{\Gamma(A)} = \|x\|_E + \|Ax\|_F\,,$$

порожденной нормой пространства $E \times F$, можно считать самостоятельным банаховым пространством.

На пространстве $\Gamma(A)$ определим оператор $B : \Gamma(A) \to E$ следующей формулой $B(x, Ax) = x$. Очевидно, оператор B линейный. Покажем его ограниченность.

$$\|B(x, Ax)\|_E = \|x\|_E \leq \|x\|_E + \|Ax\|_F = \|(x, Ax)\|_{\Gamma(A)} .$$

Итак, оператор B ограничен и $\|B\| \leq 1$, то есть $B \in L(\Gamma(A), E)$. Заметим также, что множество значений $R(B) = E$. Рассмотрим ядро оператора $N(B) \subset \Gamma(A)$. Пусть $B(x, Ax) = \Theta \in E$. Следовательно, $x = \Theta$ и $Ax = A\Theta = \Theta \in F$. Получили $(x, Ax) = (\Theta, \Theta) = \Theta \in \Gamma(A)$, то есть $N(B) = \{\Theta\}$.

Из теоремы 7.1 следует, что оператор B непрерывно обратим, то есть существует ограниченный обратный оператор $B^{-1} : E \to \Gamma(A)$. Заметим, если $x \in E$, то $B^{-1}x = (x, Ax)$. Следовательно,

$$\|B^{-1}x\|_{\Gamma(A)} = \|(x, Ax)\|_{\Gamma(A)} = \|x\|_E + \|Ax\|_F \leq \|B^{-1}\|_{E\to\Gamma(A)}\|x\|_E .$$

Отсюда следует для всех $x \in E$ оценка $\|Ax\|_F \leq \|B^{-1}\|_{E\to\Gamma(A)}\|x\|_E$, что означает ограниченность оператора A, а значит $A \in L(E, F)$. ♡

• Задачи.

9.1. Пусть E, F – линейные нормированные пространства, A – замкнутый линейный оператор из E в F. Доказать, что ядро $N(A)$ оператора A является подпространством пространства E.

9.2. Пусть E – линейное нормированное пространство, F – банахово пространство, A – замкнутый линейный оператор из E в F, B – линейный оператор из E в F, ограниченный на $D(B)$, и $D(A) \subset D(B)$. Доказать, что оператор $A + B$ с $D(A + B) = D(A)$ замкнут.

9.3. Показать, что операторы A из задач 2.11 и 2.12 замкнуты.

9.4. В пространстве $C[0, 1]$ задан оператор $Ax(t) = x'(t)$ с областью определения $D(A) = \{x \in C[0, 1] \mid (x' \in C[0, 1]) \wedge [x(0) = x(1) = 0]\}$. Доказать, что оператор A замкнут.

9.5. Пусть E, F – банаховы пространства, A – линейный оператор из E в F. Доказать, что оператор A является замкнутым тогда и только тогда, когда множество $D(A)$ с нормой $\|x\|_{D(A)} = \|x\|_E + \|Ax\|_F$ является банаховым пространством.

9.6. Пусть E – линейное нормированное пространство, в котором L, M – подпространства, и $E = L \oplus M$. Определим оператор P проектирования E на подпространство L параллельно подпространству M равенством $Px = u$, где $x = u + v$ $(u \in L, v \in M)$. Доказать, что оператор P замкнут, а, если E – банахово пространство, то ограничен.

§ 10. Линейные ограниченные функционалы

Важнейшей в функциональном анализе является

Теорема 10.1 (Хан-Банах). *Пусть E – линейное нормированное пространство и на линейном многообразии $D \subset E$ задан линейный ограниченный функционал f. Тогда существует линейный ограниченный функционал $F \in E^*$ такой, что:*

$$1)\ (\forall x \in D)[\, F(x) = f(x)]\,, \qquad 2)\ \|F\| = \|f\|\,.$$

Другими словами: всякий линейный ограниченный функционал, определенный на линейном многообразии линейного нормированного пространства, можно продолжить на все пространство с сохранением нормы. Обратим внимание, что единственность продолжения не утверждается.

Заметим, что по теореме 5.1 функционал f можно продолжить с сохранением нормы на замыкание $\overline{D}$, которое будет уже подпространством E. Если $\overline{D} = E$, то доказательство закончено. Если же нет, то далее функционал f нужно продолжать уже с подпространства. Поэтому при доказательстве теоремы Хана-Банаха, без ограничения общности, можно считать, что D подпространство E.

Доказательство этой теоремы в общем случае весьма громоздко (напр., [1], [12]) и опирается на лемму Цорна. Поэтому ограничимся рассмотрением только случая гильбертова пространства.

Прежде докажем теорему о представлении линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве.

Теорема 10.2 (Ф. Рисс). *Пусть H – гильбертово пространство со скалярным произведением (u, v), где $u, v \in H$. Пусть f – линейный ограниченный функционал на H, то есть $f \in H^*$. Тогда*

$$(\exists\, y_f \in H)(\forall\, x \in H)[\, f(x) = (x, y_f)]\,.$$

При этом $y_f \in H$ определяется по функционалу f однозначно и $\|y_f\| = \|f\|$.

Доказательство. Для выбранного функционала $f \in H^*$ рассмотрим его ядро $N(f) = \{z \in H |\, f(z) = 0\}$. Заметим, что $N(f)$ – замкнутое линейное многообразие в H, то есть подпространство H.

Если $N(f) = H$, то $f(x) = 0$ для всех $x \in H$, и тогда верно представление $f(x) = (x, \Theta)$, то есть $y_f = \Theta$.

Предположим теперь, что $N = N(f) \neq H$. Воспользуемся теоремой о проекциях $H = N \oplus N^{\perp}$ и $N^{\perp} \neq \{\Theta\}$. Возьмем $y_0 \in N^{\perp}$ и $y_0 \neq \Theta$. Тогда $f(y_0) \neq 0$. Строим элемент $y_1 = y_0/f(y_0)$, для которого $f(y_1) = 1$.

Возьмем произвольный $x \in H$ и пусть $f(x) = \alpha$. Тогда $f(x) = \alpha f(y_1)$. Следовательно, $f(x - \alpha\, y_1) = 0$, то есть $x - \alpha\, y_1 = z \in N$. Получили представление $x = \alpha y_1 + z$, где $\alpha\, y_1 \in N^{\perp}$ и $z \in N$. Далее рассмотрим

$$(x, y_1) = (\alpha y_1 + z, y_1) = \alpha \|y_1\|^2\,,$$

так как $(z, y_1) = 0$. Обозначим $y_f = y_1/\|y_1\|^2$. Таким образом,

$$f(x) = \alpha = (x, \frac{y_1}{\|y_1\|^2}) = (x, y_f)\,.$$

Предположим, что для некоторого $\overline{y} \in H$ также для всех $x \in H$ выполняется $f(x) = (x, \overline{y})$. Тогда $(x, y_f - \overline{y}) = 0$. Положим $x = y_f - \overline{y}$. Получим $\|y_f - \overline{y}\|^2 = 0$, то есть $\overline{y} = y_f$ и, следовательно, элемент $y_f \in H$ определяется по функционалу f однозначно.

Покажем, что $\|y_f\| = \|f\|$. Действительно, для всех $x \in H$

$$|f(x)| = |(x, y_f)| \leq \|x\|\, \|y_f\|.$$

Это означает, что $\|f\| \leq \|y_f\|$. С другой стороны, для $x = y_f$ выполняется $|f(y_f)| = \|y_f\|^2 = \|y_f\|\, \|y_f\|$. Следовательно, $\|f\| = \|y_f\|$. ♡

Замечание. Построенное взаимно однозначное соответствие между элементами пространства H и пространства H^* является *изометрией*, так как сохраняет норму. Легко видеть, что это соответствие сохраняет линейные операции, то есть является *изоморфизмом.* Таким образом, пространства H и H^* можно отождествить, то есть считать $H = H^*$ с точностью до изометрического изоморфизма.

Доказательство теоремы 10.1 для гильбертова пространства.

Считаем, что в гильбертовом пространстве H на подпространстве $D \subset H$ задан линейный ограниченный функционал f. Так как подпространство D можно считать самостоятельным гильбертовым пространством, то по теореме 10.2 этот функционал порожден элементом $y \in D$, то есть $f(x) = (x, y)$ для всех $x \in D$.

Определим функционал F на $x \in H$ тем же выражением $F(x) = (x, y)$. Очевидно, функционал F линейный на H и для всех $x \in D$ выполняется $F(x) = (x, y) = f(x)$ и $\|F\| = \|y\| = \|f\|$. Итак, функционал F является продолжением функционала f с сохранением нормы.

Теорема Хана-Банаха для гильбертова пространства доказана. Но в случае гильбертова пространства, кроме существования продолжения, можно показать и единственность такого продолжения.

Предположим, что функционал $G(x) = (x, z)$ с некоторым $z \in H$ также является продолжением функционала f с сохранением нормы. По теореме о проекциях $H = D \oplus D^{\perp}$, то есть элемент $z \in H$ однозначно представим в виде $z = z_1 + z_2$, где $z_1 \in D$ и $z_2 \in D^{\perp}$. Для всякого $x \in D$ получим

$$(x, z_1) = (x, z) = G(x) = f(x) = (x, y)\,.$$

Следовательно, $(x, z_1 - y) = 0$, что означает $z_1 = y$. Итак, $z = y + z_2$. Теперь заметим, что по теореме 10.2

$$\|y\|^2 = \|f\|^2 = \|G\|^2 = \|z\|^2 = \|y + z_2\|^2 = \|y\|^2 + \|z_2\|^2\,.$$

Отсюда следует $z_2 = \Theta$, то есть $z = y$ и $G(x) = (x, y) = F(x)$. ♡

Сформулируем полученный аналог теоремы Хана-Банаха в гильбертовом пространстве.

Теорема 10.3. *Пусть H – гильбертово пространство и на линейном многообразии $D \subset H$ задан линейный ограниченный функционал f. Тогда существует единственное продолжение функционала f на все пространство H с сохранением нормы.*

Весьма важными в функциональном анализе являются три следствия из теоремы Хана-Банаха, которые докажем для произвольного линейного нормированного пространства.

Следствие 10.1. *Пусть E – линейное нормированное пространство и элемент $x_0 \in E$ такой, что $x_0 \neq \Theta$. Тогда существует функционал $f \in E^*$ такой, что $f(x_0) = \|x_0\|$ и $\|f\| = 1$.*

Доказательство. Рассмотрим множество $\mathcal{L} = \{tx_0 |\, t-\text{числа}\}$, которое является линейным многообразием в E. Определим на $x = tx_0 \in \mathcal{L}$ функционал $f(tx_0) = t\|x_0\|$. Очевидно, функционал f линейный и $f(x_0) = \|x_0\|$. Кроме того, $|f(tx_0)| = |t|\,\|x_0\| = \|tx_0\|$, что означает ограниченность функционала f на $\mathcal{L}$ и $\|f\| = 1$.

Осталось по теореме Хана-Банаха продолжить функционал f с $\mathcal{L}$ на все пространство E. ♡

Следствие 10.2. *Пусть $\mathcal{L}$ – линейное многообразие в линейном нормированном пространстве E. Пусть элемент $x_0 \notin \mathcal{L}$ такой, что*

$$\rho(x_0, \mathcal{L}) = \inf_{x \in \mathcal{L}} \|x_0 - x\| = d > 0\,.$$

Тогда существует функционал $f \in E^*$ такой, что:

$$1)\ (\forall x \in \mathcal{L})[\, f(x) = 0], \quad 2)\ f(x_0) = 1, \quad 3)\ \|f\| = 1/d\,.$$

Доказательство. Зададим в E линейное многообразие

$$\mathcal{L}_1 = \{x + tx_0 |\, (x \in \mathcal{L}) \wedge (t - \text{числа})\}\,.$$

Установим единственность представления элемента $y \in \mathcal{L}_1$ в виде $y = x + tx_0$. Пусть $y = x + tx_0 = x_1 + t_1 x_0$, где $x, x_1 \in \mathcal{L}$. Тогда $x - x_1 = (t - t_1)x_0$. Если предположить, что $t = t_1$, то получим $x = x_1$ и представление y единственно. Если же $t \neq t_1$, то элемент $x_0 = (x - x_1)/(t - t_1) \in \mathcal{L}$. Но по условию $x_0 \notin \mathcal{L}$.

На $y = x + tx_0 \in \mathcal{L}_1$ определим функционал $f(y) = f(x + tx_0) = t$. Функционал f, как легко показать, на $\mathcal{L}_1$ линейный. Если взять $x \in \mathcal{L}$, то $x = x + 0x_0 \in \mathcal{L}_1$ и $f(x) = 0$. Так как $x_0 = \Theta + 1x_0 \in \mathcal{L}_1$, то $f(x_0) = 1$. Итак, выполнены свойства 1) и 2).

Покажем ограниченность функционала f на $\mathcal{L}_1$ и найдем его норму. Возьмем $y = x + tx_0 \in \mathcal{L}_1$ и пусть $t \neq 0$. Тогда $y \neq \Theta$, иначе $x_0 = -x/t \in \mathcal{L}$. Далее получим

$$|f(y)| = |t| = \frac{|t|\,\|y\|}{\|y\|} = \frac{\|y\|}{\|x_0 - (-x/t)\|} \leq \frac{\|y\|}{d}\,.$$

Оценка следует из того, что $-x/t \in \mathcal{L}$ и тогда $\|x_0 - (-x/t)\| \geq d$. В случае $y = x + 0x_0 \in \mathcal{L}$ получим $|f(y)| = 0 \leq \|y\|/d$. Таким образом, $\|f\| \leq 1/d$. Теперь по определению точной нижней границы найдем минимизирующую последовательность $\{x_n\} \subset \mathcal{L}$, то есть $\|x_0 - x_n\| \to d$ при $n \to \infty$. Тогда

$$1 = f(x_0) = f(x_0) - f(x_n) = f(x_0 - x_n) \leq \|f\|\,\|x_0 - x_n\|\,.$$

Отсюда при $n \to \infty$ получим $\|f\| \geq 1/d$. Следовательно, $\|f\| = 1/d$ на линейном многообразии $\mathcal{L}_1$.

Осталось функционал f продолжить по теореме Хана-Банаха с $\mathcal{L}_1$ на все пространство E. ♡

Следствие 10.3. *Пусть E – линейное нормированное пространство, и $\{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset E$ – линейно независимая система элементов. Тогда существует линейно независимая система функционалов $\{f_1, f_2, ..., f_n\} \subset E^*$ такая, что $f_l(x_k) = \delta_{lk}$, где символ $\delta_{lk} = 1$ при $l = k$ и $\delta_{lk} = 0$ при $l \neq k$.*

Доказательство. Возьмем элемент x_1 и рассмотрим линейную оболочку $\mathcal{L}_1 = \mathscr{L}(x_2, x_3, ..., x_n)$, которая в силу конечномерности является подпространством E. Рассмотрим

$$\rho(x_1, \mathcal{L}_1) = \inf_{x \in \mathcal{L}_1} \|x_1 - x\| \geq 0\,.$$

Если предположить, что $\rho(x_1, \mathcal{L}_1) = 0$, то в силу замкнутости $\mathcal{L}_1$ получим $x_1 \in \mathcal{L}_1$, а это невозможно в силу линейной независимости системы $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Следовательно, $\rho(x_1, \mathcal{L}_1) > 0$.

По следствию 10.2 существует функционал $f_1 \in E^*$ такой, что $f_1(x_1) = 1$ и $f_1(x) = 0$ на всех $x \in \mathcal{L}_1$. В частности, $f_1(x_k) = 0$ для всех $k = \overline{2, n}$.

Функционалы $f_2, f_3, ..., f_n \in E^*$ строятся подобным образом. Так, например, для построения функционала $f_2 \in E^*$ следует рассмотреть линейную оболочку $\mathcal{L}_2 = \mathscr{L}(x_1, x_3, x_4, ..., x_n)$ и определить по следствию 10.2 соответствующий функционал f_2.

Докажем линейную независимость функционалов $\{f_1, f_2, ..., f_n\}$. Предположим, что $\sum_{k=1}^n c_k f_k = \Theta \in E^*$. Тогда для любого $i = \overline{1\,, n}$ выполняется $0 = \Theta(x_i) = \sum_{k=1}^n c_k f_k(x_i) = c_i$. ♡

Линейно независимые системы элементов $\{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset E$ и функционалов $\{f_1, f_2, ..., f_n\} \subset E^*$ такие, что $f_l(x_k) = \delta_{lk}$, называются *биортогональными*.

Лемма 10.1. *Пусть E – линейное нормированное пространство, и задана $\{f_1, f_2, ..., f_n\} \subset E^*$ – линейно независимая система функционалов. Тогда существует линейно независимая система элементов $\{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset E$, биортогональная с $\{f_1, f_2, ..., f_n\}$.*

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции.

Покажем, что утверждение верно для одного функционала $f_1 \in E^*$. Заметим, что $f_1 \neq \Theta$. Тогда найдется $x_0 \in E$, что $f_1(x_0) \neq 0$. Положим $x_1 = x_0/f_1(x_0)$. Элемент $x_1 \neq \Theta$ и $f_1(x_1) = 1$.

Предположим, что утверждение леммы справедливо для $m-1$-го функционала. Докажем, что тогда утверждение справедливо и для m функционалов.

Итак, пусть для функционалов $\{f_2, f_3, ..., f_m\}$ построена биортогональная линейно независимая система элементов $\{x_2, x_3, ..., x_m\} \subset E$. Добавим функционал f_1. Для каждого $x \in E$ рассмотрим элементы $y = x - \sum_{l=2}^m f_l(x) x_l$. Тогда для каждого $i = 2, 3, ..., m$ выполнено

$$f_i(y) = f_i(x) - \sum_{l=2}^m f_l(x) f_i(x_l) = f_i(x) - f_i(x) = 0\,.$$

Предположим, что для каждого $x \in E$ и $f_1(y) = 0$. Тогда для каждого $x \in E$ выполняется $f_1(x) = \sum_{l=2}^m f_l(x) f_1(x_l)$, то есть $f_1 = \sum_{l=2}^m f_1(x_l) f_l$ и функционалы $\{f_1, f_2, ..., f_m\}$ линейно зависимы. Полученное противоречие означает, что существует $x_1 \in E$ такой, что для $y_1 = x_1 - \sum_{l=2}^m f_l(x_1) x_l$ выполняется $f_1(y_1) \neq 0$. Положим $z_1 = y_1/f_1(y_1)$. Тогда $f_1(z_1) = 1$ и одновременно $f_l(z_1) = 0$ для $l = \overline{2,\, m}$.

Заметим, что равенства $f_1(x_k)=0$ для $k=2,3,...,m$ пока не установлены, и доказательство леммы следует продолжить.

Возьмем множество функционалов $\{f_1,f_3,...,f_m\}$ и для них по предположению индукции построим биортогональную систему $\{x_1,x_3,...,x_m\}\subset E$. Добавим функционал f_2 и способом, указанным выше, построим элемент $z_2\in E$ такой, что $f_2(z_2)=1$ и $f_l(z_2)=0$ для $l=1,3,4,...,m$. Итак, построены уже два элемента $z_1,z_2\in E$, биортогональные $f_1,f_2\in E^*$.

Продолжая эту процедуру, получим систему элементов $\{z_1,z_2,...,z_m\}\subset E$, биортогональную функционалам $\{f_1,f_2,...,f_m\}\subset E^*$, что завершает индукцию.

Для доказательства линейной независимости системы $\{z_1,z_2,...,z_n\}$ рассмотрим $\sum_{k=1}^n c_kz_k=\Theta\in E$. Тогда для любого значения $i=\overline{1,n}$ получим $0=f_i(\Theta)=\sum_{k=1}^n c_kf_i(z_k)=c_i$. ♡

• Задачи.

10.1. Пусть E – линейное нормированное пространство, элементы $x,y\in E$ и $x\neq y$. Доказать, что существует такой $f\in E^*$, что $f(x)\neq f(y)$.

10.2. Пусть E – линейное нормированное пространство, $x\in E$. Доказать, что $\|x\|=\sup|f(x)|$, где точная верхняя граница берется по $f\in E^*$ с $\|f\|=1$.

10.3. Пусть E – линейное нормированное пространство, $f\in E^*$, $A\in L(E)$. Доказать, что $\|A\|=\sup|f(Ax)|$, где точная верхняя граница берется по $x\in E$ с $\|x\|=1$ и по $f\in E^*$ с $\|f\|=1$.

10.4. Доказать, что если линейное нормированное пространство E бесконечномерно, то и сопряженное пространство E^* бесконечномерно.

§ 11. Вид линейных ограниченных функционалов в некоторых пространствах

Функционалы в конечномерных пространствах. Пусть E – конечномерное линейное нормированное пространство. Пусть $\{e_1,e_2,...,e_m\}$ – базис в E. Тогда $E=\mathscr{L}(e_1,e_2,...,e_m)$ и всякий $x\in E$ однозначно представим в виде $x=\sum_{i=1}^m x_ie_i$, где $x_i\,(i=\overline{1,m})$ – координаты вектора x в базисе $\{e_1,e_2,...,e_m\}$. Возьмем функционал $f\in E^*$, тогда $f(x)=\sum_{i=1}^m x_if(e_i)$. Следовательно, функционал f определяется набором чисел $(f_1,f_2,...,f_m)$, где $f_i=f(e_i)$ для $i=\overline{1,m}$.

Очевидно и обратное, каждый набор чисел $(f_1,f_2,...,f_m)$ определяет выражением $f(x)=\sum_{i=1}^m x_if_i$ функционал $f\in E^*$.

Построим в пространстве E^* базис. По системе $\{e_1,e_2,...,e_m\}\subset E$ определим биортогональную систему функционалов $\{g_1,g_2,...,g_m\}\subset E^*$. Так как

$g_i(e_j) = \delta_{ij}$, то $g_i(x) = x_i$. Поэтому

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} g_i(x) f(e_i) = \sum_{i=1}^{m} f(e_i) g_i(x) = \left(\sum_{i=1}^{m} f_i g_i\right)(x)\,.$$

Таким образом, система функционалов $\{g_1, g_2, ..., g_m\}$ является базисом в E^* и $E^* = \mathscr{L}(g_1, g_2, ..., g_m)$ есть m-мерное линейное пространство.

Норма в пространстве E^* определяется нормой пространства E. Пусть, например, для $x \in E$ норма следующая $\|x\| = \max_{1\leq i\leq m} |x_i|$. Тогда для функционала $f \in E^*$ и $f \neq \Theta$ получим

$$|f(x)| \leq \sum_{i=1}^{m} |x_i|\, |f(e_i)| \leq \left(\sum_{i=1}^{m} |f_i|\right) \|x\|\,.$$

Отсюда следует, что $\|f\| \leq \sum_{i=1}^{m} |f_i|$. Рассмотрим элемент $x_0 = \sum_{i=1}^{m} (\mathrm{sgn} f_i) e_i$. Так как есть $f_i \neq 0$, то $\|x_0\| = \max_{1\leq i\leq m} |\mathrm{sgn} f_i| = 1$ и

$$f(x_0) = \sum_{i=1}^{m} (\mathrm{sgn} f_i) f(e_i) = \sum_{i=1}^{m} |f_i|\,.$$

Это означает, что $\|f\| \geq \sum_{i=1}^{m} |f_i|$, и окончательно $\|f\| = \sum_{i=1}^{m} |f_i|$.

В частности, если $E = \mathbb{R}^m_\infty$, то $E^* = \mathbb{R}^m_1$.

Функционалы в пространствах l_p $(1 < p < \infty)$. В пространстве l_p для $1 < p < \infty$ рассмотрим систему элементов $\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$, где последовательность $\omega_k = (0, 0, ..., 0, 1, 0, ...)$, а 1 стоит на k-ом месте. Возьмем произвольный элемент $x = (x_1, x_2, ..., x_k, ...) \in l_p$. Заметим, что

$$\|x - \sum_{k=1}^{n} x_k \omega_k\| = \|(0, ..., 0, x_{n+1}, x_{n+2}, ...)\| = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,.$$

Таким образом, $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \omega_k$. Пусть функционал $f \in l_p^*$ и $f \neq \Theta$. В силу линейности и непрерывности функционала получим $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k f(\omega_k)$. Обозначим $f(\omega_k) = f_k$, где $k \in \mathbb{N}$. Получим $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k f_k$. Итак, каждый функционал $f \in l_p^*$ однозначно определяется числовой последовательностью $(f_1, f_2, ..., f_k, ...)$. Выясним свойства этой последовательности.

Фиксируем произвольное $n \in \mathbb{N}$. Пусть $q > 1$ такое, что $1/p + 1/q = 1$ и определим элемент $x^n = \sum_{k=1}^{n} |f_k|^{q-1} (\mathrm{sgn} f_k) \omega_k \in l_p$. Тогда

$$f(x^n) = \sum_{k=1}^{n} |f_k|^{q-1} (\mathrm{sgn} f_k) f_k = \sum_{k=1}^{n} |f_k|^q\,. \tag{11.1}$$

Учитывая $(q-1)p=q$, получим далее

$$f(x^n) \le \|f\| \, \|x^n\| = \|f\| \left(\sum_{k=1}^{n} |f_k|^{(q-1)p} \right)^{1/p} = \|f\| \left(\sum_{k=1}^{n} |f_k|^q \right)^{1/p} . \qquad (11.2)$$

Из (11.1) и (11.2) следует оценка

$$\sum_{k=1}^{n} |f_k|^q \le \|f\| \left(\sum_{k=1}^{n} |f_k|^q \right)^{1/p} .$$

Таким образом, $(\sum_{k=1}^{n} |f_k|^q)^{1/q} \le \|f\|$. Так как последняя оценка справедлива для любого $n \in \mathbb{N}$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^q$ сходится и $(\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^q)^{1/q} \le \|f\|$.

Получили, что построенная по функционалу $f \in l_p^*$ последовательность $(f_1, f_2, ..., f_k, ...) \in l_q$ для $1/p + 1/q = 1$.

Справедливо и обратное утверждение. Возьмем произвольную последовательность $(g_1, g_2, ..., g_k, ...) \in l_q$. Нетрудно показать, что функционал $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k g_k$ является линейным и ограниченным на пространстве l_p.

Итак, в пространстве l_p с $1 < p < \infty$ общий вид линейного ограниченного функционала задается выражением $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k f_k$, где последовательность $(f_1, f_2, ..., f_k, ...) \in l_q$ и $1/p + 1/q = 1$.

Определим $\|f\|$. Заметим, что для всех $x \in l_p$ по неравенству Гельдера

$$|f(x)| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} x_k f_k \right| \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^q \right)^{1/q} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^q \right)^{1/q} \|x\| .$$

Отсюда следует оценка $\|f\| \le (\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^q)^{1/q}$. Учитывая полученную ранее противоположную оценку, получим $\|f\| = (\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^q)^{1/q}$.

Заметим, что для $1 < p < \infty$, построенное соответствие между пространствами l_p^* и l_q с $1/p + 1/q = 1$ является взаимно однозначным, сохраняющим линейные операции и норму, то есть является изометрическим изоморфизмом. Таким образом, можно отождествить пространство l_p^* с пространством l_q, то есть можно считать $l_p^* = l_q$, где $1 < p < \infty$ и $1/p + 1/q = 1$.

Функционалы в пространствах $L_p(a, b)$ с $1 < p < \infty$. Фиксируем элемент $y \in L_q(a, b)$, где $1/p + 1/q = 1$, и на элементах $x \in L_p(a, b)$ определим функционал

$$f(x) = \int_a^b x(t) y(t) \, dt . \qquad (11.3)$$

Очевидно, функционал f на пространстве $L_p(a, b)$ является линейным и ограниченным, то есть $f \in L_p^*(a, b)$. Оказывается (см., напр., [1], [12]), формула

(11.3) задает общий вид линейного ограниченного функционала на пространстве $L_p(a,b)$ с $1 < p < \infty$. Причем $\|f\| = (\int_a^b |y(t)|^q dt)^{1/q}$.

Отождествляя функционал $f \in L_p^*(a,b)$ с соответствующей функцией $y \in L_q(a,b)$, где $1/p + 1/q = 1$, с точностью до изометрического изоморфизма можно считать $L_p^*(a,b) = L_q(a,b)$.

Замечание. В случае вещественного гильбертова пространства $L_2(a,b)$ представление функционала $f \in L_2^*(a,b) = L_2(a,b)$ в виде (11.3) следует из теоремы 10.2.

• Задачи.

11.1. Показать, что если: а) $E = \mathbb{R}_1^n$, то $E^* = \mathbb{R}_\infty^n$;

б) $E = \mathbb{R}_p^n$ $(1 < p < \infty)$, то $E^* = \mathbb{R}_q^n$ $(p^{-1} + q^{-1} = 1)$.

11.2. В пространстве $\mathbb{R}_1^2$ на подпространстве

$$L = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 |\ 2x_1 - x_2 = 0\}$$

задан линейный функционал $f(x) = x_1$. Доказать, что существует единственное продолжение функционала f на все $\mathbb{R}_1^2$ с сохранением нормы и найти это продолжение.

11.3. Доказать, что $(l_1)^* = m$, то есть функционал $f \in (l_1)^*$ имеет вид $f(x) = \sum_{n=1}^\infty x_n y_n$, где $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_1$, $y = (y_1, y_2, \ldots) \in m$ и $\|f\| = \|y\|_m$.

§ 12. Второе сопряженное пространство

Пусть E – линейное нормированное пространство, и E^* – сопряженное пространство. Поскольку E^* также является линейным нормированным пространством, то определено второе сопряженное пространство $(E^*)^* = E^{**}$. Аналогично определяется пространство E^{***} и так далее.

Рассмотрим пространство E^{**}. Пусть функционалы $f \in E^*$ меняются, а элемент $x \in E$ фиксирован. Тогда выражение $f(x)$ задает функционал на пространстве E^*. Таким образом, элемент $x \in E$ порождает на пространстве E^* функционал F_x, действующий по правилу $F_x(f) = f(x)$.

Покажем, что функционал F_x является линейным. Действительно, для $f_1, f_2 \in E^*$ и чисел $\lambda_1,\ \lambda_2$ получим

$$F_x(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)x = \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) = \lambda_1 F_x(f_1) + \lambda_2 F_x(f_2)\,.$$

Кроме того, из оценки

$$|F_x(f)| = |f(x)| \le \|f\|\,\|x\|$$

следует ограниченность функционала F_x на E^* и справедливость оценки $\|F_x\| \le \|x\|$. Таким образом, функционал $F_x \in E^{**}$.

Установим точное значение $\|F_x\|$. По следствию 10.1 для $x \in E$ и $x \neq \Theta$ существует функционал $f_0 \in E^*$ такой, что $\|f_0\| = 1$ и $f_0(x) = \|x\|$. Тогда

$$|F_x(f_0)| = |f_0(x)| = \|x\| = \|x\| \, \|f_0\| \, .$$

Отсюда следует оценка $\|F_x\| \geq \|x\|$, что с учетом доказанного выше противоположного неравенства дает равенство $\|F_x\| = \|x\|$.

Построенное соответствие между $x \in E$ и $F_x \in E^{**}$ сохраняет линейные операции. Действительно, для $x_1, x_2 \in E$, чисел $\lambda_1,\ \lambda_2$ и $f \in E^*$ получим

$$F_{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}(f) = f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) =$$

$$\lambda_1 F_{x_1}(f) + \lambda_2 F_{x_2}(f) = (\lambda_1 F_{x_1} + \lambda_2 F_{x_2})(f) \, . \tag{12.1}$$

Покажем теперь, что разным элементам $x \in E$ ставятся в соответствие разные функционалы $F_x \in E^{**}$. Пусть $x_1, x_2 \in E$ и предположим $F_{x_1} = F_{x_2}$. Учитывая (12.1), получим для любого $f \in E^*$

$$F_{x_1 - x_2}(f) = F_{x_1}(f) - F_{x_2}(f) = 0 \, .$$

Следовательно, функционал $F_{x_1 - x_2} = \Theta \in E^{**}$ и $\|x_1 - x_2\| = \|F_{x_1 - x_2}\| = 0$, то есть $x_1 = x_2$.

Таким образом, установленное соответствие между пространством E и некоторой частью пространства E^{**} является изометрическим изоморфизмом. В таком случае, отождествляя $x \in E$ с соответствующим функционалом $F_x \in E^{**}$, получим вложение $E \subset E^{**}$.

Если при построенном соответствии окажется $E = E^{**}$, то пространство E называется *рефлексивным.*

Замечание. Пространства l_p и $L_p(a, b)$ для $1 < p < \infty$ являются рефлексивными.

§ 13. Слабая сходимость элементов

Пусть E – линейное нормированное пространство. Говорят, что последовательность $\{x_n\} \subset E$ *слабо сходится* при $n \to \infty$, если для всякого функционала $f \in E^*$ числовая последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится. Если при этом

$$(\exists\, x_0 \in E)(\forall\, f \in E^*)[f(x_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(x_0)] \, ,$$

то говорят, что последовательность $\{x_n\}$ *слабо сходится к элементу* x_0. Сам элемент x_0 называют *слабым пределом* последовательности $\{x_n\}$.

Слабую сходимость $\{x_n\}$ к x_0 при $n \to \infty$ будем обозначать $x_n \xrightarrow{\text{слабо}} x_0$.

Отметим, что слабо сходящаяся последовательность, вообще, не обязана иметь слабый предел.

Простейшие свойства.

1). *Для всякой последовательности* $\{x_n\} \subset E$ *слабый предел, если он существует, является единственным.*

Доказательство. Пусть

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{слабо}} x' \quad \text{и} \quad x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{слабо}} x''.$$

Предположим, что $x' \neq x''$. По следствию 10.1 существует функционал $f_0 \in E^*$ с $\|f_0\| = 1$, что $f_0(x' - x'') = \|x' - x''\|$. Заметим, что

$$f_0(x') = \lim_{n\to\infty} f_0(x_n) = f_0(x'').$$

Следовательно, $\|x' - x''\| = 0$ и $x' = x''$. Установленное противоречие доказывает, что $x' = x''$. ♡

2). *Всякая слабо сходящаяся последовательность является ограниченной.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\} \subset E$ слабо сходится. Тогда для любого функционала $f \in E^*$ сходится числовая последовательность $\{f(x_n)\}$. Но тогда эта последовательность ограничена, то есть

$$(\forall\, f \in E^*)(\exists C \geq 0)(\forall\, n \in \mathbb{N})[\,|f(x_n)| \leq C]\,.$$

Заметим, что $f(x_n) = F_{x_n}(f)$, где функционал $F_{x_n} \in E^{**}$ определен в § 12. Следовательно,

$$(\forall\, f \in E^*)(\exists C \geq 0)(\forall\, n \in \mathbb{N})[\,|F_{x_n}(f)| \leq C]\,.$$

Пространство E^* банахово, поэтому согласно принципа равномерной ограниченности (теорема 4.1) получим

$$(\exists K \geq 0)(\forall\, n \in \mathbb{N})[\,\|F_{x_n}\| \leq K]\,.$$

Так как $\|F_{x_n}\| = \|x_n\|$, то последовательность $\{x_n\}$ ограничена. ♡

3). *Пусть последовательность* $\{x_n\} \subset E$ *слабо сходится к элементу* $x_0 \in E$. *Тогда*

$$\|x_0\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|\,.$$

Доказательство. Утверждение для случая $x_0 = \Theta$ очевидно. Считаем далее $x_0 \neq \Theta$.

По следствию 10.1 существует функционал $f_0 \in E^*$ с $\|f_0\| = 1$, что $f_0(x_0) = \|x_0\|$. Далее получим

$$\|x_0\| = f_0(x_0) = \lim_{n\to\infty} f_0(x_n) = \liminf_{n\to\infty} f_0(x_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_0\|\,\|x_n\| = \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|\,.$$

Из утверждения 3) следует, что если $\|x_n\| \le C$, то и $\|x_0\| \le C$. ♡

4). *Если последовательность $\{x_n\} \subset E$ сходится при $n \to \infty$ к элементу $x_0 \in E$ по норме, то есть $\|x_n - x_0\| \to 0$, то $x_n \xrightarrow{\text{слабо}} x_0$. Обратное утверждение неверно.*

Доказательство. Если $\|x_n - x_0\| \to 0$, то слабая сходимость $\{x_n\}$ к x_0 следует из оценки

$$|f(x_n) - f(x_0)| \le \|f\| \, \|x_n - x_0\| \,,$$

справедливой для всякого $f \in E^*$.

Покажем теперь, что из слабой сходимости сходимость последовательности по норме пространства не следует.

В пространстве l_2 рассмотрим последовательность элементов $\{x_n\} \subset l_2$, где $x_n = (0, ..., 0, 1, 0, ...)$ и 1 стоит на n-ом месте. Возьмем функционал $f = (f_1, f_2, ..., f_k, ...) \in l_2^* = l_2$. Тогда, учитывая представление функционала в l_2, получим

$$f(x_n) = f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 = f(\Theta) \,.$$

Это означает, что $x_n \xrightarrow{\text{слабо}} \Theta$. Однако $\|x_i - x_j\| = \sqrt{2}$ при $i \ne j$, то есть последовательность $\{x_n\}$ не фундаментальна, и не сходится в l_2. ♡

Теорема 13.1. *Пусть линейное нормированное пространство E конечномерно. Если последовательность $\{x_n\} \subset E$ слабо сходится к элементу $x_0 \in E$, то $\|x_n - x_0\| \to 0$ при $n \to \infty$.*

Доказательство. Пусть $E = \mathscr{L}(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_m)$, где $\{\omega_k\}_{k=1}^m$ – базис пространства E. Тогда всякий $x \in E$ представим в виде $x = \sum_{k=1}^m \xi_k \omega_k$, где ξ_k – координаты элемента x в базисе $\{\omega_k\}_{k=1}^m$. Определим в E новую норму $\|x\|_* = \sum_{k=1}^m |\xi_k|$. Исходная норма $\|x\|$ и новая $\|x\|_*$ эквивалентны. Тогда

$$(\exists M > 0)(\forall\, x \in E)[\, \|x\| \le M\|x\|_*]. \tag{13.1}$$

По линейно независимой системе элементов $\{\omega_k\}_{k=1}^m \subset E$ определим, в силу следствия 10.3, биортогональную систему функционалов $\{f_l\}_{l=1}^m \subset E^*$. Элементы x_0 и x_n, где $n \in \mathbb{N}$, разложим по базису:

$$x_0 = \sum_{k=1}^m \xi_k^0 \omega_k, \qquad x_n = \sum_{k=1}^m \xi_k^n \omega_k \,.$$

Учитывая слабую сходимость x_n к x_0, для всех $l = \overline{1, m}$ получим

$$\xi_l^n = f_l(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f_l(x_0) = \xi_l^0 \,. \tag{13.2}$$

Из (13.1) и (13.2) следует

$$\|x_n - x_0\| \le M\|x_n - x_0\|_* = M\sum_{k=1}^{m} |\xi_k^n - \xi_k^0| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,. \qquad \heartsuit$$

Если в линейном нормированном пространстве E всякая слабо сходящаяся последовательность имеет слабый предел, то пространство E называется *слабо полным.*

Теорема 13.2. *Всякое рефлексивное пространство слабо полно.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\} \subset E$ слабо сходится, то есть для любого функционала $f \in E^*$ сходится числовая последовательность $\{f(x_n)\}$. Так как $f(x_n) = F_{x_n}(f)$, то для всех $f \in E^*$ сходится последовательность $\{F_{x_n}(f)\}$. Но тогда последовательность функционалов $\{F_{x_n}\} \subset E^{**}$ сильно фундаментальна. Заметим, что в силу теоремы 4.2 пространство E^{**} сильно полно. Тогда

$$(\exists F_0 \in E^{**})(\forall\, f \in E^*)[\, F_{x_n}(f) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_0(f)]\,. \tag{13.3}$$

Пространство E рефлексивно, то есть $E = E^{**}$, поэтому функционал $F_0 \in E^{**}$ порождается некоторым элементом $x_0 \in E$, что $F_0(f) = f(x_0)$ для всех $f \in E^*$. Таким образом, из (13.3) следует

$$(\exists\, x_0 \in E)(\forall\, f \in E^*)[\, f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x_0)]\,,$$

что означает $x_n \xrightarrow{\text{слабо}} x_0$. ♡

Множество $M \subset E$, где E – линейное нормированное пространство, называется *слабо относительно компактным*, если из любой последовательности его элементов можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность.

Теорема 13.3. *Всякое слабо относительно компактное множество в линейном нормированном пространстве является ограниченным.*

Доказательство. Допустим, что слабо относительно компактное множество $M \subset E$ неограничено. Тогда $(\forall\, n \in \mathbb{N})(\exists\, x_n \in M)[\, \|x_n\| > n]\,.$

Из построенной последовательности $\{x_n\} \subset M$ выделим слабо сходящуюся при $k \to \infty$ подпоследовательность $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$. Но тогда последовательность $\{x_{n_k}\}$ ограничена, то есть $(\exists C \ge 0)(\forall\, k \in \mathbb{N})[\, \|x_{n_k}\| \le C]$, что противоречит оценке $\|x_{n_k}\| > n_k$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, множество M ограничено. ♡

Теорема 13.4. *Всякое ограниченное множество в рефлексивном пространстве слабо относительно компактно.*

Доказательство этого утверждения можно найти, например, в [15]. Здесь ограничимся рассмотрением лишь случая гильбертова пространства.

Доказательство теоремы 13.4 для гильбертова пространства. В гильбертовом пространстве H со скалярным произведением (x, y) рассмотрим ограниченное множество $M \subset H$, то есть $(\exists\, c > 0)(\forall\, x \in M)[\,\|x\| \leq c]$.

Возьмем произвольную последовательность $\{x_n\} \subset M$. Числовая последовательность $\{(x_n, x_1)\}$, где $n \in \mathbb{N}$, в силу оценки $|(x_n, x_1)| \leq \|x_n\|\,\|x_1\| \leq c^2$ ограничена. Тогда существует подпоследовательность $\{(x_n^1, x_1)\} \subset \{(x_n, x_1)\}$, которая сходится при $n \to \infty$. Рассмотрим последовательность $\{(x_n^1, x_2)\}$, которая также ограничена $|(x_n^1, x_2)| \leq c^2$. Вновь выделим сходящуюся при $n \to \infty$ подпоследовательность $\{(x_n^2, x_2)\} \subset \{(x_n^1, x_2)\}$. Заметим, что имеют место вложения $\{x_n^2\} \subset \{x_n^1\} \subset \{x_n\}$. Поэтому вместе с последовательностью $\{(x_n^2, x_2)\}$ сходится и последовательность $\{(x_n^2, x_1)\}$. Затем получим сходящуюся последовательность $\{(x_n^3, x_3)\} \subset \{(x_n^2, x_3)\}$ и так далее.

Продолжим этот процесс и выделим диагональную последовательность $\{x_n^n\} \subset \{x_n\}$. Заметим, что $\{(x_n^n, x_m)\} \subset \{(x_n^m, x_m)\}$ при всех $n > m$. Следовательно, для всех $m \in \mathbb{N}$ при $n \to \infty$ последовательность $\{(x_n^n, x_m)\}$ сходится.

Возьмем произвольный элемент $z \in H$ и покажем, что последовательность $\{(x_n^n, z)\}$ сходится. Это в силу теоремы 10.2 будет означать слабую сходимость последовательности $\{x_n^n\}$ в гильбертовом пространстве H.

Рассмотрим множество

$$\mathcal{L} = \{y \in H|\,(\exists k \in \mathbb{N})(\exists a_1, a_2, ..., a_k)[\,y = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i]\}\,.$$

Множество $\mathcal{L}$ является, очевидно, линейным многообразием в H. Тогда замыкание $\overline{\mathcal{L}} = H_0$ будет подпространством H. По теореме о проекциях представим пространство H в виде $H = H_0 \oplus H_0^{\perp}$. В таком случае $z = z_1 + z_2$, где $z_1 \in H_0$ и $z_2 \in H_0^{\perp}$. Так как все $x_n^n \in \mathcal{L} \subset H_0$, то $(x_n^n, z) = (x_n^n, z_1)$.

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда, учитывая $\overline{\mathcal{L}} = H_0$, найдется $y \in \mathcal{L}$ такой, что $\|z_1 - y\| < \varepsilon/3c$. Далее для всех $n, p \in \mathbb{N}$ получим

$$|(x_{n+p}^{n+p}, z) - (x_n^n, z)| = |(x_{n+p}^{n+p}, z_1) - (x_n^n, z_1)| \leq |(x_{n+p}^{n+p}, z_1 - y)| +$$

$$+|(x_{n+p}^{n+p}, y) - (x_n^n, y)| + |(x_n^n, y - z_1)| \leq \|x_{n+p}^{n+p}\|\,\|z_1 - y\| + |(x_{n+p}^{n+p}, y) - (x_n^n, y)| +$$

$$+\|x_n^n\|\,\|y - z_1\| < \frac{2\varepsilon}{3} + |(x_{n+p}^{n+p}, y) - (x_n^n, y)|\,.$$

Так как элемент $y \in \mathcal{L}$, то $y = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i$ и $(x_n^n, y) = \sum_{i=1}^{k} \overline{a_i}(x_n^n, x_i)$. Последовательности $\{(x_n^n, x_i)\}$, где $i = \overline{1, k}$, сходятся. Следовательно, сходится и, значит, фундаментальна последовательность $\{(x_n^n, y)\}$, то есть

$$(\exists N \in \mathbb{N})(\forall\, n \geq N)(\forall\, p \in \mathbb{N})[\,|(x_{n+p}^{n+p}, y) - (x_n^n, y)| < \varepsilon/3]\,.$$

Получили, что по заданному $\varepsilon > 0$

$$(\exists N \in \mathbb{N})(\forall\, n \geq N)(\forall\, p \in \mathbb{N})[\,|(x_{n+p}^{n+p}, z) - (x_n^n, z)| < \varepsilon]\,,$$

то есть числовая последовательность $\{(x_n^n, z)\}$ фундаментальна. Следовательно, эта последовательность сходится при $n \to \infty$, что доказывает слабую сходимость последовательности $\{x_n^n\} \subset H$ и слабую относительную компактность ограниченного множества M. ♡

• Задачи.

13.1. Пусть E – линейное нормированное пространство; $x_n, x \in E$; $f_n, f \in E^*$. При $n \to \infty$ выполнено одно из условий:
а) $x_n \to x,\ f_n \to f$; б) $x_n \xrightarrow{\text{слабо}} x,\ f_n \to f$; в) E – БП, $x_n \to x,\ f_n \xrightarrow{\text{сильно}} f$.
Доказать, что $f_n(x_n) \to f(x)$.

13.2. Пусть H – гильбертово пространство; $x_n, x, y_n, y \in H$. Что можно сказать о сходимости при $n \to \infty$ последовательности (x_n, y_n), если:
а) $x_n \xrightarrow{\text{слабо}} x,\quad y_n \to y$; б) $x_n \xrightarrow{\text{слабо}} x,\quad y_n \xrightarrow{\text{слабо}} y$?

13.3. Пусть H – гильбертово пространство; $x_n, x \in H$. Пусть $x_n \xrightarrow{\text{слабо}} x$ и $\|x_n\| \to \|x\|$ при $n \to \infty$. Доказать, что $\|x_n - x\| \to 0$.

13.4. Пусть E – линейное нормированное пространство. Множество $M \subset E$ назовем *слабо замкнутым*, если из того что $\{x_n\} \subset M$ и $x_n \xrightarrow{\text{слабо}} x$ при $n \to \infty$ следует $x \in M$.
а) Доказать, что слабо замкнутое множество является замкнутым.
б) Указать замкнутое множество, которое не является слабо замкнутым.
в) Показать, что замкнутый шар $B[x_o, r] \subset E$ является слабо замкнутым.
г) Показать, что подпространство $\mathcal{L} \subset E$ является слабо замкнутым.

13.5. Пусть E – линейное нормированное пространство. Множество $M \subset E$ назовем *слабо ограниченным*, если $(\forall f \in E^*)(\exists c \geq 0)(\forall x \in M)(|f(x)| \leq c)$. Доказать, что множество M слабо ограничено тогда и только тогда, когда оно ограничено.

13.6. Пусть H – гильбертово пространство и $\{x_n\} \subset H$ – ортогональная система элементов. Доказать, что эквивалентны условия: а) $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ – сходится; б) $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ – слабо сходится; в) $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2$ – сходится.

§ 14. Сопряженные операторы

Пусть E, F – линейные нормированные пространства, и задан оператор $A \in L(E, F)$. Возьмем функционал $f \in F^*$ и определим на E функционал

$\varphi(x) = f(Ax)$. Очевидно, функционал φ линейный. Из оценки

$$|\varphi(x)| = |f(Ax)| \le \|f\| \, \|Ax\|_F \le \|f\| \, \|A\| \, \|x\|_E$$

следует ограниченность функционала φ.

Итак, каждому $f \in F^*$ поставлен в соответствие $\varphi \in E^*$. Следовательно, определено отображение $A^* : F^* \to E^*$ такое, что для $f \in F^*$ функционал $\varphi = A^* f \in E^*$ на $x \in E$ действует по правилу $(A^* f)x = f(Ax)$.

Оператор A^* называется *сопряженным* к оператору $A \in L(E, F)$.

Теорема 14.1. *Пусть E, F – линейные нормированные пространства, и оператор $A \in L(E, F)$. Тогда оператор $A^* \in L(F^*, E^*)$ и $\|A^*\| = \|A\|$.*

Доказательство. Установим линейность оператора A^*. Для f_1, $f_2 \in F^*$, чисел λ_1, λ_2 и всех $x \in E$ получим

$$[A^*(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)]x = (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(Ax) = \lambda_1 f_1(Ax) + \lambda_2 f_2(Ax) =$$

$$= \lambda_1 (A^* f_1)x + \lambda_2 (A^* f_2)x = (\lambda_1 A^* f_1 + \lambda_2 A^* f_2)x \,.$$

Таким образом, $A^*(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 A^* f_1 + \lambda_2 A^* f_2$. Покажем теперь ограниченность оператора A^*. Для $f \in F^*$ и $x \in E$

$$|(A^* f)x| = |f(Ax)| \le \|f\| \, \|Ax\|_F \le \|f\| \, \|A\| \, \|x\|_E \,.$$

Отсюда следует оценка $\|A^* f\| \le \|A\| \, \|f\|$, то есть оператор A^* ограничен и $\|A^*\| \le \|A\|$. Установили $A^* \in L(F^*, E^*)$.

Найдем точное значение $\|A^*\|$. Пусть элемент $x_0 \in E$ такой, что $Ax_0 \ne \Theta$. Тогда по следствию 10.1 существует функционал $f_0 \in F^*$, что $\|f_0\| = 1$ и $f_0(Ax_0) = \|Ax_0\|_F$. Далее получим

$$\|Ax_0\|_F = f_0(Ax_0) = (A^* f_0)x_0 \le \|A^*\| \, \|f_0\| \, \|x_0\|_E = \|A^*\| \, \|x_0\|_E \,.$$

Заметим, что последняя оценка выполняется для всех $x_0 \in E$. Следовательно, $\|A\| \le \|A^*\|$ и тогда $\|A^*\| = \|A\|$. ♡

Оператор Фредгольма в пространстве $L_2(a, b)$.

В $L_2(a, b)$ – пространстве классов эквивалентных функций $x(t)$ с нормой $\|x\| = (\int_a^b |x(t)|^2 \, dt)^{1/2}$ рассмотрим оператор

$$Ax(t) = \int_a^b K(t, s) x(s) \, ds \,. \tag{14.1}$$

Считаем, что функция $K(t, s)$ измерима на квадрате $D = [a, b] \times [a, b]$ и определен

$$\int_a^b \int_a^b |K(t, s)|^2 \, dt ds = B^2 < \infty \,, \tag{14.2}$$

то есть функция $K(t,s)$ принадлежит пространству $L_2(D)$.

Покажем, что оператор $A : L_2(a,b) \to L_2(a,b)$. Пусть функция $x \in L_2(a,b)$. Тогда функция $|x(t)|^2$ суммируемая на $[a,b]$ и можно считать, что функция $|x(t)|^2$ суммируемая на квадрате D. Таким образом, $K(t,s)x(s)$, в силу неравенства Гельдера, является функцией, суммируемой на D. Из теоремы Фубини следует, что $\int_a^b K(t,s)x(s)\,ds$ есть функция, суммируемая по $t \in [a,b]$. В частности, суммируемая функция $Ax(t)$ является измеримой.

Установим, что функция $|Ax(t)|^2$ является суммируемой. Из (14.2) по теореме Фубини получим, что функция $\int_a^b |K(t,s)|^2\,ds$ суммируемая по $t \in [a,b]$. Кроме того, при почти всех $t \in [a,b]$ функция $K(t,s) \in L_2(a,b)$, как функция по $s \in [a,b]$. В таком случае, используя неравенство Гельдера, при почти всех $t \in [a,b]$ получим

$$|Ax(t)|^2 = \left| \int_a^b K(t,s)x(s)\,ds \right|^2 \leq$$

$$\leq \int_a^b |K(t,s)|^2\,ds \int_a^b |x(s)|^2\,ds = \int_a^b |K(t,s)|^2\,ds\,\|x\|^2\,. \tag{14.3}$$

Последняя оценка означает, что измеримая функция $|Ax(t)|^2$ является суммируемой, то есть оператор $A : L_2(a,b) \to L_2(a,b)$.

Очевидно, оператор A является линейным. Установим его ограниченность. Для $x \in L_2(a,b)$ воспользуемся оценкой (14.3), теоремой Фубини и (14.2).

$$\|Ax\|^2 = \int_a^b |Ax(t)|^2\,dt \leq \int_a^b \left[\int_a^b |K(t,s)|^2\,ds \right] dt\,\|x\|^2 = B^2\|x\|^2\,.$$

Итак, оператор Фредгольма $A \in L(L_2(a,b))$ и

$$\|A\| \leq \left(\int_a^b \int_a^b |K(t,s)|^2\,dtds \right)^{1/2} = B\,.$$

Построим оператор A^*, сопряженный к оператору A. Обратим внимание, что $L_2^*(a,b) = L_2(a,b)$. Тогда $A^* : L_2(a,b) \to L_2(a,b)$.

Напомним, что функционал $f \in L_2^*(a,b)$ на $x \in L_2(a,b)$ задается выражением $f(x) = \int_a^b x(t)f(t)\,dt$, где функция $f(t) \in L_2(a,b)$. Следовательно,

$$f(Ax) = \int_a^b Ax(t)f(t)\,dt = \int_a^b \left\{ \int_a^b K(t,s)x(s)\,ds \right\} f(t)\,dt\,. \tag{14.4}$$

Заметим, что функция $x(t)f(s) \in L_2(D)$, так как это измеримая в квадрате D функция и

$$\int_a^b \int_a^b |x(s)f(t)|^2\,dtds = \int_a^b |x(s)|^2\,ds \int_a^b |f(t)|^2\,dt\,.$$

Так как и функция $K(t,s) \in L_2(D)$, то из неравенства Гельдера следует суммируемость по квадрату D функции $K(t,s)x(s)f(t)$. Следовательно, по теореме Фубини

$$\int_a^b \left\{ \int_a^b K(t,s)x(s)\,ds \right\} f(t)\,dt = \int_a^b \int_a^b K(t,s)x(s)f(t)\,dsdt =$$

$$= \int_a^b x(s) \left\{ \int_a^b K(t,s)f(t)\,dt \right\} ds\,. \tag{14.5}$$

В (14.4) функция $\varphi(s) = \int_a^b K(t,s)f(t)\,dt \in L_2(a,b)$. Таким образом, из (14.4) и (14.5)

$$f(Ax) = (A^*f)x = \int_a^b x(s)\varphi(s)ds = \int_a^b x(s)A^*f(s)\,ds\,,$$

где

$$A^*f(s) = \int_a^b K(t,s)f(t)\,dt\,. \tag{14.6}$$

Сделав в (14.6) замену переменных, получим

$$A^*f(t) = \int_a^b K(s,t)f(s)\,ds\,.$$

Установили, что сопряженный оператор к оператору (14.1) также является интегральным оператором Фредгольма с ядром $K(s,t)$, которое получается перестановкой переменных в ядре $K(t,s)$. Отметим, что функции $K(t,s)$ и $K(s,t)$ называются *транспонированными*.

Определение сопряженного оператора в пространствах со скалярным произведением.

Пусть заданы гильбертово пространство X и пространство со скалярным произведением Y. Для $x_1, x_2 \in X$ скалярное произведение $(x_1, x_2)_X$, а для $y_1, y_2 \in Y$ скалярное произведение $(y_1, y_2)_Y$. Для $x \in X$, $y \in Y$ и оператора $A \in L(X,Y)$ рассмотрим выражение $(Ax, y)_Y$. Переменную $y \in Y$ фиксируем. Тогда по $x \in X$ получим линейный функционал $\varphi_y(x) = (Ax, y)_Y$. Из оценки

$$|\varphi_y(x)| = |(Ax,y)_Y| \le \|Ax\|_Y \|y\|_Y \le \|A\|\,\|x\|_X \|y\|_Y$$

следует ограниченность функционала φ_y и оценка нормы $\|\varphi_y\| \le \|A\|\,\|y\|_Y$. Так как X – гильбертово пространство, то по теореме 10.2

$$(\exists\, y^* \in X)(\forall\, x \in X)[\,\varphi_y(x) = (x, y^*)_X]\,.$$

Таким образом, определен оператор $A^* : Y \to X$, действующий по правилу $A^* y = y^*$. Получили, что для всех $x \in X$ и $y \in Y$

$$(Ax, y)_Y = (x, y^*)_X = (x, A^* y)_X \, .$$

Из линейности оператора A и свойств скалярного произведения легко следует линейность оператора A^*. Установим ограниченность оператора A^*. Для всякого $y \in Y$ получим

$$\|A^* y\|_X^2 = (A^* y, A^* y)_X = (AA^* y, y)_Y \le \|AA^* y\|_Y \|y\|_Y \le \|A\| \, \|A^* y\|_X \|y\|_Y \, .$$

Отсюда следует оценка $\|A^* y\|_X \le \|A\| \, \|y\|_Y$, то есть оператор $A^* \in L(Y, X)$ и $\|A^*\| \le \|A\|$. Получим точное значение $\|A^*\|$. Для всех $x \in X$

$$\|Ax\|_Y^2 = (Ax, Ax)_Y = (x, A^* Ax)_X \le \|x\|_X \|A^* Ax\|_X \le \|x\|_X \|A^*\| \, \|Ax\|_Y \, .$$

Следовательно, $\|Ax\|_Y \le \|A^*\| \, \|x\|_X$, то есть $\|A\| \le \|A^*\|$. Учитывая противоположное неравенство, установленное выше, получим $\|A^*\| = \|A\|$.

Построенный оператор $A^* \in L(Y, X)$ называется *эрмитово сопряженным* к оператору A.

В случае комплексных пространств X, Y и оператора $A \in L(X, Y)$ между свойствами сопряженного и эрмитово сопряженного операторов есть небольшое различие. Так для числа $\lambda \in \mathbb{C}^1$ для обычного сопряженного оператора $(\lambda A)^* = \lambda A^*$, а для эрмитово сопряженного $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$.

• Задачи.

14.1. Пусть E, F – линейные нормированные пространства. Пусть операторы $A, B \in L(E, F)$ и α, β – числа. Доказать, что $(\alpha A + \beta B)^* = \alpha A^* + \beta B^*$.

14.2. Пусть E, F – линейные нормированные пространства, заданы операторы $A \in L(E, F)$ и $B \in L(F, E)$. Доказать, что $(AB)^* = B^* A^*$.

14.3. Пусть E, F – линейные нормированные пространства. Пусть оператор $A \in L(E, F)$ и непрерывно обратим. Доказать, что оператор A^* непрерывно обратим и $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

14.4. Найти операторы, сопряженные к следующим операторам, действующим в l_p, где $1 \le p < \infty$, и которые на $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \in l_p$ определены равенствами:

1) $A_n x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$, 2) $Bx = (0, x_1, x_2, x_3, \ldots)$,

3) $Cx = (x_2, x_3, x_4 \ldots)$, 4) $D_n x = (0, x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$,

5) $Ex = (0, 0, x_1, 0, 0 \ldots)$, 6) $F_n x = (0, 0, x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}, 0, 0, \ldots)$.

14.5. В пространстве l_2 на элементах $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots) \in l_2$ определим операторы $A_n x = (x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots)$.

а) Доказать, что $A_n \in L(l_2)$ и $A_n \overset{\text{сильно}}{\longrightarrow} \Theta$ при $n \to \infty$.
в) Найти A_n^* и выяснить, верно ли, что $A_n^* \overset{\text{сильно}}{\longrightarrow} \Theta$ при $n \to \infty$.

14.6. Найти оператор, сопряженный к оператору $A \in L\big(L_2(0,1)\big)$, если:

$$\text{а) } Ax(t) = tx(t), \qquad \text{б) } Ax(t) = \int_0^1 tx(s)\,ds,$$

$$\text{в) } Ax(t) = \int_0^1 sx(s)\,ds, \qquad \text{г) } Ax(t) = \int_0^t x(s)\,ds.$$

14.7. Для оператора ортогонального проектирования P, определенного в задаче 2.9, найти сопряженный оператор P^*.

14.8. Пусть H – гильбертово пространство; $y, z \in H$, $y \neq \Theta$, $z \neq \Theta$ – произвольные фиксированные элементы. Для $x \in H$ определим оператор $Ax = (x,y)z$. Доказать, что $A \in L(H)$ и найти оператор A^*.

§ 15. Вполне непрерывные операторы

Пусть E, F – линейные нормированные пространства, и задан оператор $A \in L(E,F)$. Оператор A называется *вполне непрерывным*, если всякое ограниченное множество $M \subset E$ он переводит в относительно компактное множество $A[M] \subset F$.

Заметим, что не всякий оператор из $L(E,F)$ является вполне непрерывным. Пусть, например, $\dim E = \infty$. Рассмотрим тождественный оператор $I \in L(E)$. Как известно, замкнутый шар с центром в нуле радиуса единица $B[\Theta, 1] = M$ в бесконечномерном пространстве не является относительно компактным множеством. Тогда образ $I[M] = M$ не будет относительно компактным множеством. Значит, оператор $I \in L(E)$ не является вполне непрерывным.

Множество всех вполне непрерывных операторов из $L(E,F)$ будем обозначать $\sigma(E,F)$.

Теорема 15.1. *Пусть E, F – линейные нормированные пространства. Множество вполне непрерывных операторов $\sigma(E,F)$ является линейным многообразием в пространстве $L(E,F)$. Если пространство F банахово, то множество $\sigma(E,F)$ замкнуто, то есть является подпространством $L(E,F)$.*

Доказательство. Возьмем операторы $A_1, A_2 \in \sigma(E,F)$ и два числа λ_1, λ_2. Покажем, что оператор $A = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 \in \sigma(E,F)$. Пусть $M \subset E$ – ограниченное множество, то есть $(\exists\, c > 0)(\forall\, x \in M)[\, \|x\|_E \leq c]$. Покажем, что образ $A[M] \subset F$ является относительно компактным множеством.

Возьмем произвольную последовательность $\{y_n\} \subset A[M]$. Найдется последовательность $\{x_n\} \subset M$ такая, что $y_n = Ax_n$. Заметим, что $\|x_n\|_E \le c$, и тогда последовательность $\{A_1 x_n\}$ относительно компактна. Выделим сходящуюся подпоследовательность $\{A_1 x_{n_k}\} \subset \{A_1 x_n\}$. Из относительно компактной последовательности $\{A_2 x_{n_k}\}$ выделим сходящуюся подпоследовательность $\{A_2 x_{n_{k_i}}\} \subset \{A_2 x_{n_k}\}$. Тогда последовательность элементов

$$y_{n_{k_i}} = \lambda_1 A_1 x_{n_{k_i}} + \lambda_2 A_2 x_{n_{k_i}}$$

сходится при $i \to \infty$.

Итак, множество $A[M]$ относительно компактно, и оператор A является вполне непрерывным. Следовательно, множество $\sigma(E,F)$ – линейное многообразие в $L(E,F)$.

Предположим теперь, что пространство F банахово, и установим замкнутость множества $\sigma(E,F)$.

Пусть оператор $A \in \overline{\sigma(E,F)}$. Тогда найдется последовательность операторов $\{A_n\} \subset \sigma(E,F)$ такая, что $\|A - A_n\| \to 0$ при $n \to \infty$. Пусть ограниченное множество $M \subset E$ такое, что $(\forall x \in M)[\, \|x\|_E \le c]$. Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем $m \in \mathbb{N}$, что $\|A - A_m\| < \varepsilon / c$. Тогда для всех $x \in M$

$$\|Ax - A_m x\|_F \le \|A - A_m\| \, \|x\|_E < \varepsilon \, .$$

Следовательно, множество $A_m[M]$ является для множества $A[M] \subset F$ относительно компактной ε-сетью. Так как пространство F полное, то по следствию из теоремы Хаусдорфа получим относительную компактность множества $A[M]$.

Таким образом, оператор $A \in \sigma(E,F)$. Следовательно, множества $\sigma(E,F)$ замкнуто в $L(E,F)$, то есть является подпространством. ♡

Теорема 15.2. *Пусть E, F – линейные нормированные пространства, и хотя бы одно из этих пространств конечномерно. Тогда множество вполне непрерывных операторов $\sigma(E,F) = L(E,F)$.*

Доказательство. Следует установить включение $L(E,F) \subset \sigma(E,F)$.

Предположим сначала, что $\dim E < \infty$. Пусть $M \subset E$ – ограниченное и, следовательно, относительно компактное множество. Возьмем оператор $A \in L(E,F)$, и рассмотрим последовательность элементов $\{y_n\} \subset A[M]$. Тогда $y_n = Ax_n$, где последовательность $\{x_n\} \subset M$. Выделим сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$, что $\|x_{n_k} - x_0\|_E \to 0$ при $k \to \infty$, где $x_0 \in E$. Так как оператор A непрерывный, то $\|Ax_{n_k} - Ax_0\|_F \to 0$. Получили сходящуюся при $k \to \infty$ подпоследовательность $\{y_{n_k}\} \subset \{y_n\}$, где $y_{n_k} = Ax_{n_k}$.

Таким образом, множество $A[M]$ относительно компактно, и оператор A вполне непрерывный, то есть $A \in \sigma(E,F)$.

Теперь предположим, что $\dim F < \infty$. Пусть даны ограниченное множество $M \subset E$ и оператор $A \in L(E,F)$. Из оценки $\|Ax\|_F \leq \|A\| \, \|x\|_E$, где $x \in M$, следует ограниченность множества $A[M] \subset F$. Так как $\dim F < \infty$, то множество $A[M]$ относительно компактно в F. Следовательно, оператор $A \in \sigma(E,F)$. $\heartsuit$

Теорема 15.3. *Пусть E, F – линейные нормированные пространства, и оператор $A \in \sigma(E,F)$. Тогда сопряженный оператор $A^* \in \sigma(F^*, E^*)$.*

Доказательство. Пусть $M \subset F^*$ – произвольное ограниченное множество. Тогда $(\exists\, r > 0)(\forall\, f \in M)[\, \|f\| \leq r]$. Следовательно, $M \subset B[\Theta, r] \subset F^*$. Далее шар $B[\Theta, r]$ будем обозначать B^*. Покажем, что образ $A^*[B^*] \subset E^*$ является относительно компактным множеством в пространстве E^*. Так как образ $A^*[M] \subset A^*[B^*]$, то тогда и множество $A^*[M]$ будет относительно компактным. Таким образом, будет установлено $A^* \in \sigma(F^*, E^*)$.

В пространстве E возьмем шар $B = B[\Theta, 1]$, рассмотрим образ $A[B]$, и определим замыкание образа $K = \overline{A[B]}$. Так как множество $A[B]$ относительно компактно в F, то множество K будет компактным.

Функционалы $f \in B^* \subset F^*$ будем рассматривать только на множестве $K \subset F$. Покажем, что это множество функционалов равномерно ограничено и равностепенно непрерывно на K. Равностепенная непрерывность следует из оценки для $f \in B^* = B[\Theta, r]$ и $y_1, y_2 \in K$

$$|f(y_1) - f(y_2)| \leq \|f\| \, \|y_1 - y_2\|_F \leq r \|y_1 - y_2\|_F \,.$$

Для доказательства равномерной ограниченности возьмем $f \in B^*$ и $y \in K$. Так как $K = \overline{A[B]}$, то найдется последовательность $\{y_n\} \subset A[B]$ такая, что $\|y - y_n\|_F \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда $y_n = Ax_n$, где $\{x_n\} \subset B = B[\Theta, 1] \subset E$. Получим оценку

$$|f(y_n)| = |f(Ax_n)| \leq \|f\| \, \|A\| \, \|x_n\|_E \leq r \|A\| \,.$$

В последнем неравенстве, учитывая непрерывность функционала f, делаем предельный переход при $n \to \infty$. Получим нужную оценку $|f(y)| \leq r\|A\|$.

Далее воспользуемся обобщенной теоремой Арцела [10]

Пусть X – метрическое пространство и множество $K \subset X$ является компактным. Пусть $C(K)$ – полное метрическое пространство непрерывных на K функций с расстоянием для $f, g \in C(K)$ равным

$$\rho(f,g) = \sup_{y \in K} |f(y) - g(y)| \,.$$

Множество функций $P \subset C(K)$ будет относительно компактным в пространстве $C(K)$ тогда и только тогда, когда множество P ограничено в $C(K)$ и равностепенно непрерывно.

Теперь берем произвольную последовательность $\{A^* f_n\} \subset A^*[B^*]$, то есть $\{f_n\} \subset B^* = B[\Theta, r] \subset F^*$. По теореме Арцела найдется подпоследовательность $\{f_{n_k}\} \subset \{f_n\}$, сходящаяся по метрике пространства $C(K)$, где $K = \overline{A[B]}$. Но тогда последовательность $\{f_{n_k}\}$ фундаментальна в $C(K)$, то есть

$$\sup_{y \in \overline{A[B]}} |f_{n_i}(y) - f_{n_j}(y)| \xrightarrow[i,j \to \infty]{} 0\,.$$

С другой стороны

$$\|A^* f_{n_i} - A^* f_{n_j}\| = \sup_{x \in B} |(A^* f_{n_i} - A^* f_{n_j})x| = \sup_{x \in B} |(f_{n_i} - f_{n_j})(Ax)| =$$

$$= \sup_{y \in A[B]} |(f_{n_i} - f_{n_j})(y)| \leq \sup_{y \in \overline{A[B]}} |f_{n_i}(y) - f_{n_j}(y)| \xrightarrow[i,j \to \infty]{} 0\,.$$

Установлена фундаментальность последовательности $\{A^* f_{n_k}\}$ в полном пространстве E^*. Тогда последовательность $\{A^* f_{n_k}\}$ сходится, то есть множество $A^*[B[\Theta, r]]$ относительно компактно, а также относительно компактно множество $A^*[M] \subset A^*[B[\Theta, r]]$. Таким образом, оператор $A^* \in \sigma(F^*, E^*)$. ♡

Обсудим теперь результат действия вполне непрерывных операторов на слабо сходящиеся последовательности.

Лемма 15.1. *Пусть E, F – линейные нормированные пространства, и оператор $A \in L(E, F)$. Пусть последовательность $\{x_n\} \subset E$ слабо сходится при $n \to \infty$ к $x_0 \in E$. Тогда последовательность $\{Ax_n\} \subset F$ слабо сходится к $Ax_0 \in F$.*

Доказательство. Для произвольного функционала $f \in F^*$ получим

$$f(Ax_n) = (A^* f)x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} (A^* f)x_0 = f(Ax_0)\,.$$

Следовательно, $\{Ax_n\} \subset F$ слабо сходится к $Ax_0 \in F$. ♡

Лемма 15.2. *Пусть E – линейное нормированное пространство, последовательность $\{x_n\} \subset E$ слабо сходится к $x_0 \in E$ и является относительно компактным множеством. Тогда $\|x_n - x_0\| \to 0$ при $n \to \infty$.*

Доказательство. Предположим, что утверждение неверно. Тогда

$$(\exists\, \varepsilon > 0)(\exists \{x_{n_k}\} \subset \{x_n\})(\forall\, k \in \mathbb{N})[\, \|x_{n_k} - x_0\| \geq \varepsilon > 0]\,.$$

Так как множество $\{x_{n_k}\}$ относительно компактно, то

$$(\exists \{x_{n_{k_i}}\} \subset \{x_{n_k}\})(\exists\, \overline{x} \in E)[\, \|x_{n_{k_i}} - \overline{x}\| \xrightarrow[i \to \infty]{} 0]\,.$$

В таком случае, последовательность $\{x_{n_{k_i}}\}$ слабо сходится к $\overline{x}$ при $i \to \infty$. Так как слабый предел единственный, то $\overline{x} = x_0$ и $\|x_{n_{k_i}} - x_0\| \to 0$ при $i \to \infty$. А это противоречит $\|x_{n_{k_i}} - x_0\| \geq \varepsilon > 0$ для всех $i \in \mathbb{N}$. ♡

Теорема 15.4. *Пусть E, F – линейные нормированные пространства, и оператор $A \in \sigma(E,F)$. Пусть последовательность элементов $\{x_n\} \subset E$ слабо сходится к $x_0 \in E$. Тогда $\|Ax_n - Ax_0\|_F \to 0$ при $n \to \infty$.*

Доказательство. Слабо сходящаяся последовательность $\{x_n\} \subset E$ ограничена. Так как $A \in \sigma(E,F)$, то последовательность $\{Ax_n\} \subset F$ является относительно компактным множеством. Кроме того, по лемме 15.1 последовательность $\{Ax_n\}$ слабо сходится к Ax_0. Тогда по лемме 15.2 $\|Ax_n - Ax_0\|_F \to 0$ при $n \to \infty$. ♡

• Задачи.

15.1. Пусть E, F – линейные нормированные пространства. Заданы операторы $A \in L(E,F)$, $B \in \sigma(F,E)$. Доказать, что операторы AB и BA вполне непрерывны.

15.2. Пусть E – линейное нормированное пространство бесконечномерно, оператор $A \in \sigma(E)$. Может ли оператор A быть непрерывно обратимым ?

15.3. Какие из следующих операторов являются вполне непрерывными в пространстве $C[0,1]$:

а) $Ax(t) = x(0) + tx(1)$, б) $Ax(t) = \int_0^t x(s)\,ds$, в) $Ax(t) = x(t^2)$?

15.4. Будет ли вполне непрерывным в $C[-1,1]$ оператор

$$Ax(t) = 2^{-1}[x(t) + x(-t)] \ ?$$

15.5. Будет ли оператор $Ax(t) = x'(t)$ вполне непрерывным, если:

а) $A : C^1[0,1] \to C[0,1]$, б) $A : C^2[0,1] \to C^1[0,1]$, в) $A : C^2[0,1] \to C[0,1]$?

15.6. Пусть на элементах $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_p$ $(1 \le p < \infty)$ задан оператор $Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots)$, где $\lambda_k \in \mathbb{C}^1$ и $\sup|\lambda_k| < \infty$. Доказать, что оператор A вполне непрерывен в l_p тогда и только тогда, когда $\lambda_k \to 0$ при $k \to \infty$.

15.7. Какие из следующих операторов, которые на $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2$ определены равенствами: а) $Ax = (0, x_1, x_2, \ldots)$,

$$\text{б)} \quad Bx = (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots), \qquad \text{в)} \quad Cx = (0, x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots),$$

являются вполне непрерывными в l_2 ?

15.8. Пусть $\{e_n\}$ – полная ортонормированная система элементов в гильбертовом пространстве H. Пусть последовательность чисел $\lambda_n \in \mathbb{C}^1$ такая, что $\lambda_n \to 0$ при $n \to \infty$. Для $x \in H$ положим $Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x, e_n) e_n$. Доказать, что оператор A является в H вполне непрерывным.

15.9. Пусть H – гильбертово пространство, и оператор $A \in L(H)$ всякую слабо сходящуюся последовательность $\{x_n\}$ переводит в сходящуюся $\{Ax_n\}$. Доказать, что оператор A в H вполне непрерывный.

15.10. Пусть H – гильбертово пространство и оператор $A \in L(H)$. Доказать, что оператор A в H вполне непрерывен тогда и только тогда, когда для всяких последовательностей $\{x_n\}, \{y_n\} \subset H$ таких, что $x_n \xrightarrow{\text{слабо}} x$ и $y_n \xrightarrow{\text{слабо}} y$ при $n \to \infty$, выполнено $(Ax_n, y_n) \to (Ax, y)$.

15.11. Пусть H – гильбертово пространство, оператор $A \in L(H)$, и оператор A^*A – вполне непрерывен в H. Доказать, что оператор A вполне непрерывен в пространстве H.

15.12. Доказать, используя предыдущую задачу, что если оператор A вполне непрерывен в гильбертовом пространстве H, то вполне непрерывен в H и сопряженный оператор A^*.

§ 16. Вполне непрерывность оператора Фредгольма

а) Оператор с непрерывным ядром в пространстве $C[a, b]$.

Рассмотрим оператор

$$Ax(t) = \int_a^b K(t, s)x(s)\, ds\,, \tag{16.1}$$

где функция $K(t, s)$ непрерывна по совокупности переменных $a \leq t, s \leq b$. В § 2 было установлено, что оператор $A \in L(C[a, b])$. Покажем, что этот оператор является вполне непрерывным в $C[a, b]$, то есть $A \in \sigma(C[a, b])$.

Пусть $M \subset C[a, b]$ – ограниченное множество, то есть

$$(\exists P > 0)(\forall\, x \in M)[\, \|x\|_C = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)| \leq P\,]\,.$$

Покажем, что множество непрерывных функций $A[M]$ в $C[a, b]$ является относительно компактным, то есть согласно теореме Арцела ограниченным и равностепенно непрерывным.

Если функция $y \in A[M]$, то $y = Ax$, где $x \in M$. Тогда

$$\|y\|_C = \|Ax\|_C \leq \|A\|\, \|x\|_C \leq \|A\|\, P\,,$$

то есть множество $A[M]$ ограничено в $C[a, b]$.

Далее, для функции $y(t) = Ax(t)$, где $x \in M$, и $t_1, t_2 \in [a, b]$ получим

$$|y(t_1) - y(t_2)| = \left| \int_a^b [K(t_1, s) - K(t_2, s)]x(s)\, ds \right| \leq$$

$$\leq \int_a^b |K(t_1, s) - K(t_2, s)|\, |x(s)|\, ds \leq P \int_a^b |K(t_1, s) - K(t_2, s)|\, ds\,. \tag{16.2}$$

Непрерывная в квадрате $a \le t, s \le b$ функция $K(t,s)$ равномерно непрерывна. Тогда

$$(\forall\,\varepsilon > 0)(\exists\,\delta > 0)(\forall\,t_1, t_2, s \in [a,b])$$
$$\left[\,(|t_1 - t_2| < \delta) \to \left(|K(t_1,s) - K(t_2,s)| < \frac{\varepsilon}{P(b-a)}\right)\right]. \qquad (16.3)$$

Из (16.2) и (16.3) следует, что множество функций $A[M]$ равностепенно непрерывно.

Таким образом, множество $A[M] \subset C[a,b]$ относительно компактно, а оператор $A \in \sigma(C[a,b])$.

б) Оператор с непрерывным ядром из $L_2(a,b)$ в $C[a,b]$.

Оператор Фредгольма (16.1) с функцией $K(t,s)$, непрерывной по совокупности переменных $a \le t, s \le b$, будем рассматривать на пространстве $L_2(a,b)$. Покажем, что $A:\ L_2(a,b) \to C[a,b]$. Для функции $x \in L_2(a,b)$ и $t_1, t_2 \in [a,b]$, используя неравенство Гельдера, получим

$$|Ax(t_1) - Ax(t_2)| \le \int_a^b |K(t_1,s) - K(t_2,s)|\,|x(s)|\,ds \le$$
$$\le \left(\int_a^b |K(t_1,s) - K(t_2,s)|^2\,ds\right)^{1/2} \|x\|_{L_2}\,,$$

где $\|x\|_{L_2} = (\int_a^b |x(t)|^2\,dt)^{1/2}$. Зададим $\varepsilon > 0$. Так как функция $K(t,s)$ равномерно непрерывна в квадрате $a \le t, s \le b$, то

$$(\exists\,\delta > 0)(\forall\,t_1, t_2, s \in [a,b])[\,(|t_1 - t_2| < \delta) \to (|K(t_1,s) - K(t_2,s)| < \varepsilon)]\,.$$

Следовательно, если $|t_1 - t_2| < \delta$, то $|Ax(t_1) - Ax(t_2)| \le \varepsilon(b-a)^{1/2}\|x\|_{L_2}$, то есть функция $Ax(t)$ непрерывна на $[a,b]$.

Линейность оператора A очевидна. Докажем, что $A:\ L_2(a,b) \to C[a,b]$ является ограниченным оператором. Для $x \in L_2(a,b)$ получим

$$\|Ax\|_C = \max_{a \le t \le b} |Ax(t)| \le \max_{a \le t \le b}\left(\int_a^b |K(t,s)|^2\,ds\right)^{1/2} \|x\|_{L_2}\,.$$

Итак, линейный оператор $A:\ L_2(a,b) \to C[a,b]$ ограничен и

$$\|A\|_{L_2 \to C} \le \max_{a \le t \le b}\left(\int_a^b |K(t,s)|^2\,ds\right)^{1/2}.$$

Для доказательства вполне непрерывности оператора возьмем ограниченное множество $M \subset L_2(a,b)$, и покажем относительную компактность множества $A[M] \subset C[a,b]$. Отметим, что

$$(\exists P > 0)(\forall\,x \in M)[\,\|x\|_{L_2} \le P\,]\,.$$

Для всех $x \in M$ выполняется оценка $\|Ax\|_C \le \|A\| \, \|x\|_{L_2} \le \|A\| \, P$, то есть множество $A[M] \subset C[a,b]$ ограничено.

Докажем равностепенную непрерывность множества функций $A[M]$. Для функции $y(t) = Ax(t)$, где $x \in M$, и $t_1, t_2 \in [a,b]$ получим

$$|y(t_1) - y(t_2)| \le P\left(\int_a^b |K(t_1,s) - K(t_2,s)|^2 \, ds\right)^{1/2}. \tag{16.4}$$

Непрерывная в квадрате $a \le t, s \le b$ функция $K(t,s)$ равномерно непрерывна. Следовательно,

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)(\forall\, t_1, t_2, s \in [a,b])$$

$$\left[\,(|t_1 - t_2| < \delta) \to \left(|K(t_1,s) - K(t_2,s)| < \frac{\varepsilon}{P\sqrt{b-a}}\right)\right]. \tag{16.5}$$

Из (16.4) и (16.5) получим

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)(\forall x \in M)(\forall\, t_1, t_2 \in [a,b])$$

$$[\,(|t_1 - t_2| < \delta) \to (|Ax(t_1) - Ax(t_2)| < \varepsilon)]\,.$$

Доказали равностепенную непрерывность множества функций $A[M]$.

Таким образом, множество $A[M] \subset C[a,b]$ относительно компактно, а оператор $A \in \sigma(L_2(a,b), C[a,b])$.

в) Оператор с непрерывным ядром в пространстве $L_2(a,b)$.

Оператор (16.1) с непрерывной в квадрате $a \le t, s \le b$ функцией $K(t,s)$ будем рассматривать как оператор $A : L_2(a,b) \to L_2(a,b)$. В § 14 было установлено, что оператор $A \in L(L_2(a,b))$. Покажем, что оператор A является вполне непрерывным в $L_2(a,b)$, то есть $A \in \sigma(L_2(a,b))$.

Возьмем ограниченное множество $M \subset L_2(a,b)$. Как показано выше, множество $A[M] \subset C[a,b]$ и относительно компактно в $C[a,b]$. Для произвольной последовательности функций $\{y_n\} \subset A[M]$ найдется подпоследовательность $\{y_{n_k}\} \subset \{y_n\}$, сходящаяся при $k \to \infty$ в пространстве $C[a,b]$ к некоторой функции $y \in C[a,b]$. Но тогда функция $y \in L_2(a,b)$ и

$$\|y_{n_k} - y\|_{L_2} \le \sqrt{b-a}\|y_{n_k} - y\|_C \xrightarrow[k\to\infty]{} 0\,.$$

Следовательно, множество $A[M]$ относительно компактно в $L_2(a,b)$, а оператор $A \in \sigma(L_2(a,b))$.

г) Оператор в $L_2(a,b)$ с ядром, суммируемым с квадратом.

Рассмотрим оператор Фредгольма (16.1) с ядром $K(t,s)$, принадлежащим пространству $L_2(D)$, где $D = [a,b] \times [a,b]$. Как установлено в § 14, оператор

$A \in L(L_2(a,b))$. Покажем, что оператор A является вполне непрерывным в $L_2(a,b)$, то есть $A \in \sigma(L_2(a,b))$.

Заметим, что в пространстве $L_2(D)$ плотно множество непрерывных функций $C(D)$ (см.,напр., [10]). Следовательно, найдется последовательность непрерывных в квадрате D функций $\{K_n(t,s)\}$ таких, что

$$\|K - K_n\|_{L_2(D)} = \left(\int_a^b \int_a^b |K(t,s) - K_n(t,s)|^2 dtds\right)^{1/2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,.$$

Для всех $n \in \mathbb{N}$ определим операторы

$$A_n x(t) = \int_a^b K_n(t,s)x(s)\,ds\,.$$

Все операторы $A_n \in \sigma(L_2(a,b))$. Учитывая неравенство Гельдера и теорему Фубини, для $x \in L_2(a,b)$ получим

$$\|Ax - A_n x\|_{L_2} = \left(\int_a^b |Ax(t) - A_n x(t)|^2 dt\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\int_a^b \left|\int_a^b [K(t,s) - K_n(t,s)]x(s)\,ds\right|^2 dt\right)^{1/2} \le$$

$$\le \left(\int_a^b \int_a^b |K(t,s) - K_n(t,s)|^2 dsdt\right)^{1/2} \|x\|_{L_2}\,.$$

Отсюда следует

$$\|A - A_n\| \le \left(\int_a^b \int_a^b |K(t,s) - K_n(t,s)|^2 dsdt\right)^{1/2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,.$$

Это означает, что оператор $A \in \overline{\sigma(L_2(a,b))}$. Осталось заметить, что пространство $L_2(a,b)$ является полным, и воспользоваться, в силу теоремы 15.1, замкнутостью в $L(L_2(a,b))$ множества $\sigma(L_2(a,b))$. Итак, $A \in \sigma(L_2(a,b))$.

• Задача.

16.1. Доказать, что оператор $Ax(t) = \int_0^t x(s)\,ds$ является вполне непрерывным в пространстве $L_2(0,1)$.

§ 17. Теория Рисса-Шаудера линейных уравнений 2-го рода

Пусть E – линейное нормированное пространство и оператор $A \in \sigma(E)$, то есть A – линейный вполне непрерывный оператор, действующий в E. Линейное уравнение в E вида

$$x - Ax = y, \tag{17.1}$$

где $y \in E$ заданный элемент, называется линейным уравнением 2-го рода.

Наряду с уравнением (17.1) будем рассматривать в пространстве E однородное уравнение

$$z - Az = \Theta\,, \tag{17.2}$$

а также в пространстве E^* сопряженное уравнение

$$f - A^* f = \omega\,, \tag{17.3}$$

и соответствующее сопряженное однородное уравнение

$$\psi - A^* \psi = \Theta\,. \tag{17.4}$$

Заметим, что оператор A^* вполне непрерывен в E^*, так что все четыре уравнения (17.1), (17.2), (17.3) и (17.4) являются линейными уравнениями 2-го рода.

Примером такого уравнения (17.1) может служить линейное интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода, рассматриваемое в $C[a,b]$, либо в $L_2[a,b]$,

$$x(t) - \int_a^b K(t,s)\,x(s)\,ds = y(t)\,. \tag{17.5}$$

Лемма 17.1. *Пусть E – банахово пространство и оператор $A \in \sigma(E)$. Тогда множества значений $R(I-A)$ и $R(I-A^*)$ являются подпространствами в E и E^* соответственно.*

Доказательство. Заметим, что множество значений любого линейного оператора является линейным многообразием. Поэтому будем доказывать только замкнутость этих множеств. Ограничимся при этом рассмотрением множества $R(I-A)$. Для $R(I-A^*)$ доказательство аналогично.

Пусть $y_0 \in \overline{R(I-A)}$. Покажем, что $y_0 \in R(I-A)$. Возьмем последовательность $\{y_n\} \subset R(I-A)$ такую, что $y_n \to y_0$ при $n \to \infty$. Пусть последовательность $\{x_n\} \subset E$ такая, что $x_n - A\,x_n = y_n$.

Предположим сначала, что последовательность $\{x_n\}$ ограничена в E. Тогда последовательность $\{A\,x_n\}$ относительно компактна. Выделим подпоследовательность $\{A\,x_{n_k}\}$, сходящуюся в E. Следовательно, при $k \to \infty$ последовательность $x_{n_k} = A\,x_{n_k} + y_{n_k} \to x_0 \in E$. В равенстве $x_{n_k} - A\,x_{n_k} = y_{n_k}$ перейдем к пределу при $k \to \infty$. В силу непрерывности оператора A получим $x_0 - A\,x_0 = y_0$, то есть $y_0 \in R(I-A)$.

Теперь предположим, что последовательность $\{x_n\}$ не является ограниченной. Рассмотрим множество $N(I-A) = \{x \in E \,|\, x - A\,x = \Theta\}$. Очевидно, ядро $N(I-A) = N$ является подпространством E. Определим расстояния

$$\rho(x_n, N) = \inf_{z \in N} \|x_n - z\| = d_n \geq 0\,.$$

По определению точной нижней границы

$$(\forall\, n \in \mathbb{N})(\exists\, z_n \in N)[\, d_n \leq \|x_n - z_n\| \leq (1 + \frac{1}{n})d_n]\,. \tag{17.6}$$

Заметим, что $(I - A)(x_n - z_n) = y_n$. Обозначим $x_n - z_n = \overline{x}_n \in E$.

Рассмотрим прежде случай ограниченной последовательности чисел $\{d_n\}$. Тогда из (17.6) следует оценка $\|\overline{x}_n\| \leq (1 + \frac{1}{n})d_n \leq M$, то есть последовательность $\{\overline{x}_n\}$ ограничена. Попадаем в условия, уже рассмотренные выше. Так что вновь $y_0 \in R(I - A)$.

Осталось рассмотреть случай, когда последовательность $\{d_n\}$ неограничена. Докажем, что такой случай невозможен. Без ограничения общности можно считать, что $d_n \to \infty$ при $n \to \infty$, иначе можно было бы перейти к подпоследовательности.

Определим элементы $u_n = (x_n - z_n)/\|x_n - z_n\|$. Тогда $\|u_n\| = 1$. Заметим прежде всего, что

$$\|(I - A)u_n\| = \frac{\|(I - A)(x_n - z_n)\|}{\|x_n - z_n\|} = \frac{\|y_n\|}{\|x_n - z_n\|} \leq \frac{\|y_n\|}{d_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\|y_0\|}{\infty} = 0\,.$$

Теперь воспользуемся тем, что из ограниченности последовательности $\{u_n\}$ следует относительная компактность последовательности $\{Au_n\}$. Пусть подпоследовательность $\{Au_{n_k}\}$ сходится в E при $k \to \infty$. Тогда последовательность $u_{n_k} = Au_{n_k} + (I - A)u_{n_k} \to u_0 \in E$. В равенстве $u_{n_k} - Au_{n_k} = (I - A)u_{n_k}$ перейдем к пределу при $k \to \infty$, получим $u_0 - Au_0 = \Theta$, то есть $u_0 \in N(I - A)$.

Далее рассмотрим

$$\begin{gathered} x_{n_k} - \{z_{n_k} + \|x_{n_k} - z_{n_k}\|\, u_0\} = \\ = \|x_{n_k} - z_{n_k}\| \left(\frac{x_{n_k} - z_{n_k}}{\|x_{n_k} - z_{n_k}\|} - u_0 \right) = \|x_{n_k} - z_{n_k}\|\, (u_{n_k} - u_0)\,. \end{gathered} \tag{17.7}$$

В (17.7) элементы $z_{n_k} + \|x_{n_k} - z_{n_k}\|\, u_0 \in N(I - A)$. Следовательно,

$$\begin{gathered} d_{n_k} \leq \|x_{n_k} - \{z_{n_k} + \|x_{n_k} - z_{n_k}\|\, u_0\}\,\| = \|\, \|x_{n_k} - z_{n_k}\|\, (u_{n_k} - u_0)\,\| = \\ = \|x_{n_k} - z_{n_k}\|\, \|u_{n_k} - u_0\| \leq (1 + \frac{1}{n_k})\, d_{n_k}\, \|u_{n_k} - u_0\|\,. \end{gathered}$$

Отсюда, по крайней мере для больших k, получается оценка

$$\|u_{n_k} - u_0\| \geq \frac{n_k}{1 + n_k}\,.$$

Из последней оценки при $k \to \infty$ следует $0 \geq 1$. Установленное противоречие означает, что числовая последовательность $\{d_n\}$ ограничена.

Таким образом, замкнутость $R(I-A)$ доказана. ♡

Теорема 17.1 (первая теорема Фредгольма). *Пусть пространство E банахово, и оператор $A \in \sigma(E)$. Тогда следующие четыре утверждения эквивалентны:*

α) уравнение (17.1) имеет решение $x \in E$ при любом $y \in E$;

β) уравнение (17.2) имеет в E только нулевое решение $z = \Theta$;

γ) уравнение (17.3) имеет решение $f \in E^*$ при любом $\omega \in E^*$;

δ) уравнение (17.4) имеет в E^* только нулевое решение $\psi = \Theta$.

Если выполняется хотя бы одно из условий α, β, γ, δ, то операторы $I - A$ и $I - A^*$ непрерывно обратимы в E и E^* соответственно.

Доказательство проведем по схеме $\alpha \to \beta \to \gamma \to \delta \to \alpha$.

$\alpha \to \beta$). Дано: множество значений $R(I-A) = E$. Требуется доказать, что ядро $N(I-A) = \{\Theta\}$.

Предположим, что $N_1 = N(I-A) \neq \{\Theta\}$. Пусть $x_1 \in N_1$ и $x_1 \neq \Theta$. Рассмотрим уравнение $(I-A)x = x_1$. Из условия α) следует существование $x_2 \in E$, что $(I-A)x_2 = x_1$. Отсюда получим $(I-A)^2 x_2 = (I-A)x_1 = \Theta$. Таким образом, $x_2 \in N_2 = N((I-A)^2)$. Установили $N_1 \subset N_2$, и включение строгое, так как $x_2 \in N_2$ и $x_2 \notin N_1$.

Продолжая эти рассуждения, в результате получим вложенные подпространства $N_1 \subset N_2 \subset ... \subset N_{n-1} \subset N_n \subset ...$, причем все вложения строгие. Воспользуемся леммой Рисса о существовании почти перпендикуляра. Тогда

$$(\forall n \geq 2)(\exists z_n \in N_n,\, \|z_n\| = 1)(\forall x \in N_{n-1})[\, \|x - z_n\| \geq 1/2]\,.$$

Рассмотрим теперь последовательность $\{Az_n\}$, которая относительно компактна, так как последовательность $\{z_n\}$ ограничена, а оператор A вполне непрерывен. С другой стороны для всех $n < m$ получим

$$\|Az_n - Az_m\| = \|[\, z_n - (I-A)z_n + (I-A)z_m] - z_m\|\,. \tag{17.8}$$

Здесь

$$(I-A)^{m-1}[z_n - (I-A)z_n + (I-A)z_m] = \Theta\,,$$

то есть элемент $z_n - (I-A)z_n + (I-A)z_m \in N_{m-1}$. Таким образом, из (17.8) для всех $n \neq m$ следует $\|Az_n - Az_m\| \geq 1/2$.

Установленное противоречие показывает, что $N(I-A) = \{\Theta\}$. ♡

$\beta \to \gamma$). Дано: ядро $N(I-A) = \{\Theta\}$. Требуется доказать, что множество значений $R(I - A^*) = E^*$.

Возьмем произвольный функционал $\omega \in E^*$. На подпространстве $R(I-A)$ определим функционал f_0 следующим образом. Возьмем $y \in R(I-A)$. Тогда существует единственный $x \in E$, что $y = (I - A)x$. По определению считаем $f_0(y) = \omega(x)$.

Очевидно, что f_0 – линейный функционал на $R(I - A)$. Действительно, если $y_1, y_2 \in R(I - A)$ и $y_i = (I - A)x_i$ $(i = 1, 2)$, то $y_1 + y_2 = (I - A)(x_1 + x_2)$ и $f_0(y_1 + y_2) = \omega(x_1 + x_2) = \omega(x_1) + \omega(x_2) = f_0(y_1) + f_0(y_2)$. Аналогично показывается, что для $y \in R(I - A)$ и числа λ выполняется $f_0(\lambda y) = \lambda f_0(y)$.

Покажем ограниченность функционала f_0 на $R(I - A)$. Справедлива оценка $|f_0(y)| = |\omega(x)| \le \|\omega\| \, \|x\|$. Установим оценку $\|x\| \le C \, \|y\|$, где константа $C \ge 0$ не зависит от $y \in R(I - A)$.

Так как множество значений $R(I - A)$ является подпространством банахова пространства E, то $R(I - A)$ можно считать самостоятельным банаховым пространством с нормой, порожденной нормой пространства E. Рассмотрим оператор $I - A$ как оператор, определенный на банаховом пространстве E со значениями в банаховом пространстве $F = R(I - A)$. Итак, $I - A : E \to F$. Из теоремы 7.1 об обратном операторе получим существование ограниченного оператора $(I - A)^{-1} : F \to E$. Следовательно, если $y = (I - A)x$ и $x = (I - A)^{-1}y$, то $\|x\| \le \|(I - A)^{-1}\|_{F \to E} \|y\| = C \, \|y\|$. Таким образом, для всех $y \in R(I - A)$ выполняется $|f_0(y)| \le \|\omega\| \, C \, \|y\|$.

Ограниченный на $R(I - A)$ функционал f_0 продолжим по теореме 10.1 на все пространство E. Получим функционал $f \in E^*$ такой, что для всех элементов $x \in E$ выполняется $f[(I - A)x] = f_0(y) = \omega(x)$. Отсюда следует, что $[(I - A^*)f](x) = \omega(x)$, то есть $f - A^*f = \omega$ и, значит, $R(I - A^*) = E^*$. ♡

$\gamma \to \delta$). Эта часть доказательства совпадает с доказательством $\alpha \to \beta$). Нужно лишь банахово пространство E заменить на банахово пространство E^*, и оператор $A \in \sigma(E)$ заменить на оператор $A^* \in \sigma(E^*)$.

$\delta \to \alpha$). Дано: ядро $N(I - A^*) = \{\Theta\}$. Требуется доказать, что множество значений $R(I - A) = E$.

Предположим, что $R(I - A) \ne E$. Возьмем $y_0 \in E$, что $y_0 \notin R(I - A)$. Так как $R(I - A)$ – подпространство E, то $\rho(y_0, R(I - A)) > 0$, в противном случае $y_0 \in R(I - A)$. По следствию 10.2 из теоремы Хана-Банаха существует функционал $f_0 \in E^*$ такой, что $f_0(y_0) = 1$ и $f_0(y) = 0$ для всех $y \in R(I - A)$. Но тогда $f_0[(I - A)x] = 0$ для всех $x \in E$. Следовательно, $[(I - A^*)f_0]x = 0$, то есть $(I - A^*)f_0 = \Theta$. Получили $f_0 \in N(I - A^*)$ и $f_0 \ne \Theta$, что противоречит условию. Значит $R(I - A) = E$. ♡

Докажем теперь непрерывную обратимость операторов $I - A$ и $I - A^*$ при выполнении хотя бы одного из условий α, β, γ, δ. Прежде всего заметим, что по доказанному перечисленные условия выполняются одновременно. Но тогда для оператора $I - A \in L(E)$ ядро $N(I - A) = \{\Theta\}$ и множество значений $R(I - A) = E$. В таком случае непрерывная обратимость оператора $I - A$ следует из теоремы 7.1 об обратном операторе. То же рассуждение справедливо и для оператора $I - A^* \in L(E^*)$. ♡

Теорема 17.2 (вторая теорема Фредгольма). *Пусть пространство E банахово, и оператор $A \in \sigma(E)$. Тогда уравнения (17.2) и (17.4) имеют одинаковое конечное число линейно независимых решений.*

Доказательство. В первой теореме Фредгольма было доказано, что условие $N(I - A) = \{\Theta\}$ равносильно $N(I - A^*) = \{\Theta\}$. Поэтому следует рассмотреть лишь случай, когда $N(I - A) \neq \{\Theta\}$ и $N(I - A^*) \neq \{\Theta\}$.

Докажем конечномерность замкнутых линейных многообразий $N(I - A)$ и $N(I - A^*)$. Подпространство $N(I - A)$ можно рассматривать как самостоятельное линейное нормированное пространство с нормой, порожденной нормой пространства E. Пусть M – произвольное ограниченное множество в $N(I - A)$. Тогда для $x \in M$ выполняется $x = Ax$. Следовательно, $M = A[M]$. Так как оператор A является вполне непрерывным, то множество M относительно компактно в E, а значит, и в $N(I - A)$. Таким образом, $N(I - A)$ есть конечномерное линейное пространство. Тогда в E это конечномерное линейное многообразие. С линейным многообразием $N(I - A^*)$ в E^* дело обстоит аналогично.

Пусть $\dim N(I - A) = n$ и $\dim N(I - A^*) = m$. Докажем, что $n = m$.

Предположим, что $N(I - A) = \mathscr{L}(x_1, x_2, ..., x_n)$, где $\{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset E$ является базисом в $N(I - A)$, и, соответственно, $N(I - A^*) = \mathscr{L}(f_1, f_2, ..., f_m)$, где $\{f_1, f_2, ..., f_m\} \subset E^*$ – базис в $N(I - A^*)$. По следствию 10.3 определим систему функционалов $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\} \subset E^*$, биортогональную системе $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, то есть $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$ $(i, j = \overline{1, n})$. По лемме 10.1 определим также систему элементов $\{z_1, z_2, ..., z_m\} \subset E$, биортогональную функционалам $\{f_1, f_2, ..., f_m\}$, то есть $f_i(z_j) = \delta_{ij}$ $(i, j = \overline{1, n})$.

Предположим, что $n < m$. Определим в E оператор

$$Ux = Ax + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) z_i \,.$$

Оператор U вполне непрерывен, как сумма вполне непрерывного оператора A и линейного ограниченного оператора $Bx = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) z_i$, действующего в конечномерное подпространство $\mathscr{L}(z_1, z_2, ..., z_n)$ пространства E.

Покажем, что $N(I - U) = \{\Theta\}$. Пусть $x_0 \in N(I - U)$. Тогда $x_0 - Ux_0 = \Theta$ и $f_k(x_0 - Ux_0) = 0$ $(k = \overline{1, m})$, или

$$f_k\left(x_0 - Ax_0 - \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x_0) z_i\right) = 0 \,.$$

Отсюда следует равенство

$$(f_k - A^* f_k)x_0 - \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x_0) f_k(z_i) = 0\,.$$

Так как $f_k - A^* f_k = \Theta$ и $f_k(z_i) = 0$ для $i \neq k$, то $\varphi_k(x_0) = 0 \quad (k = \overline{1,n})$. Поэтому $Ux_0 = Ax_0$. Следовательно, $\Theta = x_0 - Ux_0 = x_0 - Ax_0$ и элемент $x_0 \in N(I - A)$. Но $N(I - A) = \mathscr{L}(x_1, x_2, ..., x_n)$, тогда $x_0 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i$. Применим к x_0 функционалы $\varphi_k \;\; (k = \overline{1,n})$. Тогда $0 = \varphi_k(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \varphi_k(x_i) = \xi_k$. Следовательно, $x_0 = \Theta$ и $N(I - U) = \{\Theta\}$.

Из первой теоремы Фредгольма следует, что уравнение $(I - U)x = y$ разрешимо при любом $y \in E$, в частности при $y = z_{n+1}$. Пусть x' – решение этого уравнения, то есть $(I - U)x' = z_{n+1}$. Тогда

$$1 = f_{n+1}(z_{n+1}) = f_{n+1}\left(x' - Ax' - \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x') z_i\right) =$$

$$= (f_{n+1} - A^* f_{n+1})x' - \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x') f_{n+1}(z_i) = 0\,,$$

так как $f_{n+1} - A^* f_{n+1} = \Theta$ и $f_{n+1}(z_i) = 0 \;\; (i = \overline{1,n})$.

Установленное противоречие $(1 = 0)$ показывает невозможность неравенства $n < m$.

Предположим, что $n > m$. Определим в E^* оператор

$$Vf = A^* f + \sum_{i=1}^{m} f(z_i) \varphi_i\,.$$

Оператор V вполне непрерывен, как сумма вполне непрерывного оператора A^* и линейного ограниченного оператора $Cf = \sum_{i=1}^{m} f(z_i)\varphi_i$, действующего в конечномерное подпространство $\mathscr{L}(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m)$ пространства E^*.

Покажем, что $N(I - V) = \{\Theta\}$. Пусть $f_0 \in N(I - V)$. Тогда $f_0 - Vf_0 = \Theta$ и $(f_0 - Vf_0)x_k = 0 \;\; (k = \overline{1,n})$, или

$$(f_0 - A^* f_0)x_k - \sum_{i=1}^{m} f_0(z_i) \varphi_i(x_k) = 0\,.$$

Следовательно, для $k = \overline{1,n}$

$$f_0(x_k - Ax_k) - \sum_{i=1}^{m} f_0(z_i) \varphi_i(x_k) = 0\,.$$

Напомним, что $x_k - Ax_k = \Theta$ и $\varphi_i(x_k) = \delta_{ik}$. Поэтому $f_0(z_k) = 0 \ \ (k = \overline{1,m})$. Тогда $Vf_0 = A^* f_0$. Следовательно, $\Theta = f_0 - Vf_0 = f_0 - A^* f_0$ и $f_0 \in N(I - A^*)$. Но $N(I - A^*) = \mathscr{L}(f_1, f_2, ..., f_m)$, тогда $f_0 = \sum_{i=1}^m \zeta_i f_i$. Применим f_0 к элементу z_k $(k = \overline{1,m})$. Получим $0 = f_0(z_k) = \sum_{i=1}^m \zeta_i f_i(z_k) = \zeta_k$. Следовательно, $f_0 = \Theta$ и $N(I - V) = \{\Theta\}$.

Из первой теоремы Фредгольма следует, что уравнение $(I - V)f = \omega$ разрешимо при любом $\omega \in E^*$, в частности при $\omega = \varphi_{m+1}$. Пусть f' – решение этого уравнения, то есть $(I - V)f' = \varphi_{m+1}$. Тогда

$$1 = \varphi_{m+1}(x_{m+1}) = (f' - Vf')x_{m+1} = (f' - A^* f')x_{m+1} - \sum_{i=1}^{m} f'(z_i)\varphi_i(x_{m+1}) =$$

$$= (f' - A^* f')x_{m+1} = f'(x_{m+1} - Ax_{m+1}) = 0\,.$$

Установленное противоречие $(1 = 0)$ показывает невозможность неравенства $n > m$.

Доказали, что $n = m$. $\heartsuit$

Теорема 17.3 (третья теорема Фредгольма). *Пусть пространство E банахово, и оператор $A \in \sigma(E)$. Уравнение (17.1) $x - Ax = y$ при заданном $y \in E$ разрешимо тогда и только тогда, когда для любого элемента $\psi \in E^*$, который является решением уравнения (17.4) $\psi - A^*\psi = \Theta$, выполняется условие $\psi(y) = 0$.*

Доказательство. Из теоремы 17.1 следует, что $R(I - A) = E$ тогда и только тогда, когда $N(I - A^*) = \{\Theta\}$. В этом случае утверждение теоремы 17.3 очевидно.

Считаем далее, что $R(I - A) \neq E$.

Пусть при данном $y \in E$ уравнение (17.1) имеет решение $x_0 \in E$, то есть $y = x_0 - Ax_0 \in R(I - A)$. Для любого $\psi \in N(I - A^*)$ получим

$$\psi(y) = \psi(x_0 - Ax_0) = (\psi - A^*\psi)x_0 = 0\,.$$

Докажем обратное утверждение. Пусть $y \in E$ такой, что для всех функционалов $\psi \in N(I - A^*)$ выполняется $\psi(y) = 0$. Предположим, что для этого элемента $y \in E$ уравнение (17.1) решений не имеет, то есть данный $y \notin R(I - A)$. Так как $R(I - A)$ – подпространство пространства E (лемма 17.1), то можно применить следствие 10.2 теоремы Хана-Банаха. В таком случае, найдется функционал $\psi_0 \in E^*$ такой, что $\psi_0(y) = 1$ и $\psi_0(x - Ax) = 0$ для всех $x \in E$. Следовательно, $\psi_0 - A^*\psi_0 = \Theta$. Тогда из условия теоремы 17.3 следует, что $\psi_0(y) = 0$. Полученное противоречие $(1 = 0)$ означает, что уравнение (17.1) разрешимо. $\heartsuit$

Резюмируем полученные результаты. В банаховом пространстве E для уравнения (17.1) $x - Ax = y$ с вполне непрерывным оператором A возможны только три ситуации.

1. $N(I-A) = \{\Theta\}$. Тогда оператор $I-A$ непрерывно обратим и уравнение (17.1) для любого $y \in E$ имеет единственное решение $x = (I-A)^{-1}y$.

2. $N(I-A) \neq \{\Theta\}$ и для данного $y \in E$ существует $\psi \in N(I-A^*)$ такой, что $\psi(y) \neq 0$. Тогда при данном $y \in E$ уравнение (17.1) решений не имеет.

3. $N(I-A) \neq \{\Theta\}$ и $y \in E$ такой, что для всех $\psi \in N(I-A^*)$ выполняется $\psi(y) = 0$. Тогда уравнение (17.1) имеет решение $x_0 \in E$. Напомним, что $N(I-A) = \mathscr{L}(x_1, x_2, ..., x_n)$, где $\{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset E$ – базис в $N(I-A)$. В таком случае, элементы

$$x = x_0 + \sum_{k=1}^{n} \xi_k x_k\,, \tag{17.9}$$

где ξ_k $(k = \overline{1,n})$ – произвольные постоянные, также являются решениями уравнения (17.1). Заметим также, что формула (17.9), где ξ_k $(k = \overline{1,n})$ – произвольные постоянные, а x_0 – некоторое частное решение уравнения (17.1), задает общий вид решения $x \in E$ уравнения (17.1). Следует это из того, что элемент $x - x_0 \in N(I-A)$.

Решение линейных интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода с вырожденными ядрами. Рассмотрим интегральное уравнение (17.5). Предположим, что в (17.5) ядро

$$K(t,s) = \sum_{i=1}^{n} a_i(t) b_i(s)\,. \tag{17.10}$$

Такие ядра называются вырожденными. Считаем, что функции $\{a_i(t)\}$, так же как и функции $\{b_i(s)\}$, между собой линейно независимы. В противном случае число слагаемых в (17.10) можно было бы уменьшить. Для простоты считаем, что функции $a_i, b_i, y \in C[a,b]$ $(i = \overline{1,n})$. Можно также предполагать, что, например, функции $a_i, b_i, y \in L_2(a,b)$.

Учитывая (17.10), перепишем уравнение (17.5) в виде

$$x(t) - \sum_{i=1}^{n} a_i(t) \int_a^b b_i(s) x(s)\,ds = y(t)\,. \tag{17.11}$$

Предположим, что уравнение (17.11) имеет решение $x(t)$. Обозначим $C_i = \int_a^b b_i(s)x(s)\,ds$. Тогда из (17.11) следует

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i a_i(t) + y(t)\,. \tag{17.12}$$

Из (17.12) видно, что решение уравнения (17.5) с вырожденным ядром (17.10) сводится к определению постоянных C_i $(i = \overline{1,n})$. Для этого умножим (17.12) на $b_j(t)$ и проинтегрируем от a до b.

$$\int_a^b b_j(t)x(t)\,dt = \sum_{i=1}^n C_i \int_a^b a_i(t)b_j(t)\,dt + \int_a^b b_j(t)y(t)\,dt\,.$$

Обозначим $K_{ij} = \int_a^b a_i(t)b_j(t)\,dt$ и $Y_j = \int_a^b b_j(t)y(t)\,dt$, где $i,j = \overline{1,n}$. Тогда

$$C_j - \sum_{i=1}^n K_{ij}C_i = Y_j \quad (j = \overline{1,n})\,. \tag{17.13}$$

Получили систему (17.13) линейных алгебраических уравнений, которой необходимо должны удовлетворять коэффициенты C_i в (17.12). Если система (17.13) разрешима, то, очевидно, интегральное уравнение (17.5) с вырожденным ядром (17.10) также разрешимо. При этом, если $(C_1, C_2, ..., C_n)$ – решение системы (17.13), то решением уравнения (17.5) является функция $x(t)$ из (17.12).

Обратим внимание, что система (17.13) при заданной функции $y(t)$ может иметь одно решение, может не иметь решений, а также может иметь бесконечно много решений.

• Задачи.

17.1. Решить интегральное уравнение $\quad x(t) = 1 + \lambda\int_0^1 (t-s)x(s)\,ds.$

17.2. Исследовать разрешимость интегрального уравнения
$x(t) = \lambda\int_{-1}^1 (ts^2 + t^2 s)x(s)\,ds + y(t).$

§ 18. Самосопряженные вполне непрерывные операторы

Пусть H – гильбертово пространство и оператор $A \in L(H)$. Тогда определен сопряженный (эрмитово сопряженный) оператор $A^* \in L(H)$ такой, что

$$(\forall x, y \in H)[\,(Ax, y) = (x, A^*y)]\,.$$

Оператор $A \in L(H)$ называется *самосопряженным*, если $A^* = A$, то есть

$$(\forall x, y \in H)[\,(Ax, y) = (x, Ay)]\,.$$

Лемма 18.1. *Пусть H – гильбертово пространство, и задан оператор $A = A^* \in L(H)$. Тогда:*

1) $(\forall x \in H)[\,(Ax, x) \in \mathbb{R}^1]$ и собственные значения оператора A, если они существуют, являются вещественными;

2) собственные векторы оператора A, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны;

3) если линейное многообразие $\mathcal{L} \subset H$ инвариантно относительно оператора A, то есть $A[\mathcal{L}] \subset \mathcal{L}$, то и ортогональное дополнение $\mathcal{L}^{\perp}$ инвариантно относительно оператора A, то есть $A[\mathcal{L}^{\perp}] \subset \mathcal{L}^{\perp}$.

Доказательство.

1. Для всякого $x \in H$ получим $(Ax, x) = (x, Ax) = \overline{(Ax, x)} \in \mathbb{R}^1$. Если теперь $x \neq \Theta$ и $Ax = \lambda x$, то $(Ax, x) = (\lambda x, x) = \lambda \|x\|^2$. Отсюда следует $\lambda = (Ax, x)/\|x\|^2 \in \mathbb{R}^1$.

2. Если $Ax = \lambda x$, $Ay = \mu y$ и $\lambda \neq \mu$, то $\lambda(x, y) = (Ax, y) = (x, Ay) = \mu(x, y)$. Отсюда получим $(\lambda - \mu)(x, y) = 0$. Следовательно, $(x, y) = 0$, то есть $x \perp y$.

3. Пусть элемент $y \in \mathcal{L}^{\perp}$. Для всех $x \in \mathcal{L}$ выполняется $Ax \in \mathcal{L}$. Тогда $(Ay, x) = (y, Ax) = 0$. Таким образом, $Ay \in \mathcal{L}^{\perp}$, то есть $A[\mathcal{L}^{\perp}] \subset \mathcal{L}^{\perp}$. ♡

Лемма 18.2. *Пусть H – гильбертово пространство, и задан оператор $A = A^* \in L(H)$. Тогда для всякого элемента $l \in H$ с $\|l\| = 1$ выполняется $\|Al\|^2 \leq \|A^2 l\|$. Причем знак равенства возможен тогда и только тогда, когда $A^2 l = \lambda l$, где $\lambda = \|Al\|^2$.*

Доказательство. Для $l \in H$ с $\|l\| = 1$ получим

$$\|Al\|^2 = (Al, Al) = (l, A^2 l) \leq \|l\| \, \|A^2 l\| = \|A^2 l\| \, . \tag{18.1}$$

Предположим, что $\|Al\|^2 = \|A^2 l\|$. Тогда из (18.1) следует равенство $|(l, A^2 l)| = \|l\| \, \|A^2 l\|$, то есть неравенство Коши-Буняковского обращается в равенство. Это возможно лишь для линейно зависимых векторов, то есть $A^2 l = \lambda l$. Далее получим

$$\|Al\|^2 = (l, A^2 l) = (l, \lambda l) = \overline{\lambda} \|l\|^2 = \overline{\lambda} = \lambda \, . \qquad ♡$$

Пусть оператор $A \in L(H)$. Напомним, что $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$.

Элемент $l \in H$ с $\|l\| = 1$ такой, что $\|Al\| = \|A\|$, называется *максимальным элементом* оператора A.

Лемма 18.3. *Пусть H – гильбертово пространство, и задан оператор $A = A^* \in L(H)$. Пусть l – максимальный элемент оператора A. Тогда l – собственный вектор оператора A^2 с собственным значением $\|A\|^2$.*

Доказательство. По определению максимального элемента, учитывая лемму 18.2, получим $\|A\|^2 = \|Al\|^2 \leq \|A^2 l\| \leq \|A\|^2$. В результате приходим к равенству $\|Al\|^2 = \|A^2 l\| = \|A\|^2$.

Из леммы 18.2 теперь следует, что l – собственный вектор оператора A^2 с собственным значением $\lambda = \|Al\|^2 = \|A\|^2$. ♡

Лемма 18.4. *Пусть H – гильбертово пространство, и задан оператор $A \in L(H)$ такой, что оператор A^2 имеет собственный вектор l с собственным значением α^2, где $\alpha > 0$. Тогда для оператора A элемент l является собственным вектором с собственным значением α или $-\alpha$.*

Доказательство. Имеем равенство $A^2 l = \alpha^2 l$, которое запишем в виде $(A - \alpha I)(A + \alpha I)l = \Theta$.

Допустим, что $z_0 = (A + \alpha I)l \neq \Theta$. Тогда $Az_0 = \alpha z_0$, то есть z_0 – собственный вектор оператора A с собственным значением α. Если же $(A + \alpha I)l = \Theta$, то $Al = -\alpha l$ и l – собственный вектор с собственным значением $-\alpha$. ♡

Лемма 18.5. *Пусть H – гильбертово пространство, и ненулевой оператор $A = A^* \in L(H)$ является вполне непрерывным, то есть $A \in \sigma(H)$. Тогда у оператора A существует максимальный элемент.*

Доказательство. Из определения $\|A\|$ следует существование последовательности $\{x_n\} \subset H$ такой, что $\|x_n\| = 1$ и $\|Ax_n\| \to \|A\|$ при $n \to \infty$. Так как $A \in \sigma(H)$, то множество $\{Ax_n\}$ относительно компактно и найдется последовательность $\{y_{n_k}\}$, где $y_{n_k} = Ax_{n_k}$, что $y_{n_k} \to y$ при $k \to \infty$. Тогда

$$\|y\| = \lim_{k\to\infty} \|y_{n_k}\| = \lim_{k\to\infty} \|Ax_{n_k}\| = \|A\|\,. \tag{18.2}$$

Покажем, что $l = y/\|A\|$ является максимальным элементом. В силу непрерывности оператора A получим

$$Al = \lim_{k\to\infty} A\,\frac{y_{n_k}}{\|A\|} = \frac{1}{\|A\|}\lim_{k\to\infty} A^2 x_{n_k}\,.$$

Заметим, что

$$\|Al\| = \frac{1}{\|A\|}\lim_{k\to\infty} \|A^2 x_{n_k}\| \leq \lim_{k\to\infty} \|Ax_{n_k}\| = \|A\|\,.$$

. С другой стороны, учитывая лемму 18.2 и (18.2),

$$\|Al\| = \frac{1}{\|A\|}\lim_{k\to\infty} \|A^2 x_{n_k}\| \geq \frac{1}{\|A\|}\lim_{k\to\infty} \|Ax_{n_k}\|^2 = \|A\|\,.$$

Следовательно, $\|Al\| = \|A\|$, то есть l – максимальный элемент. ♡

Следствие 18.1. *Пусть H – гильбертово пространство, и ненулевой оператор $A = A^* \in \sigma(H)$. Тогда оператор A обладает собственным вектором с собственным значением равным $\|A\|$ или $-\|A\|$.*

Доказательство. Из леммы 18.5 следует, что у оператора A существует максимальный элемент l. Тогда (лемма 18.3) l – собственный вектор оператора A^2 с собственным значением $\|A\|^2$. Учитывая лемму 18.4 получим, что

l является собственным вектором оператора A с собственным значением $\|A\|$ или $-\|A\|$. ♡

Лемма 18.6. *Пусть H – гильбертово пространство, и задан оператор $A \in \sigma(H)$. Тогда всякая ортонормированная система собственных векторов оператора A с собственными значениями, превосходящими по модулю произвольное число $\delta > 0$, конечна.*

Доказательство. Предположим, что для заданного $\delta > 0$ множество S таких собственных векторов бесконечна. Возьмем какие-либо два из этих собственных векторов:

$$e_i, e_j \in S, \quad (e_i, e_j) = 0, \quad \|e_i\| = \|e_j\| = 1, \quad Ae_i = \lambda_i e_i, \quad Ae_j = \lambda_j e_j\,.$$

Получим

$$\|Ae_i - Ae_j\|^2 = \|\lambda_i e_i - \lambda_j e_j\|^2 = |\lambda_i|^2 + |\lambda_j|^2 \geq 2\delta > 0\,.$$

Таким образом, пришли к противоречию с относительной компактностью множества $A[S]$. ♡

Непосредственно из леммы 18.6 получается

Следствие 18.2. *Пусть H – гильбертово пространство, и задан оператор $A \in \sigma(H)$. Тогда множество ненулевых собственных значений оператора A не более чем счетно, а множество взаимно ортогональных собственных векторов оператора A с данным собственным значением $\lambda \neq 0$ является конечным.*

Теорема 18.1. *Пусть H – гильбертово пространство, и задан оператор $A = A^* \in \sigma(H)$. Тогда всякий элемент $x \in H$ можно представить в виде ортогональной суммы*

$$x = \sum_j (x, e_j)e_j + h\,,$$

где $e_1, e_2, ..., e_k, ...$ – ортонормированная система собственных векторов оператора A с ненулевыми собственными значениями, и элемент $h \in H$ такой, что $Ah = \Theta$, и $e_j \perp h$ $(j = 1, 2, ...)$.

Доказательство. Рассмотрим на вещественной оси множество всех ненулевых собственных значений оператора A. В силу леммы 18.6 это множество чисел конечно, либо образует счетную последовательность, сходящуюся к нулю. Занумеруем собственные значения в порядке убывания их абсолютных величин. Условимся каждое собственное значение нумеровать столько раз, какова размерность соответствующего собственного подпространства.

Последовательности $\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, ...\}$ всех ненулевых собственных значений оператора A сопоставим последовательность собственных векторов

$\{e_1, e_2, ..., e_n, ...\}$, где $Ae_n = \lambda_n e_n$ $(n = 1, 2, ...)$. Можно считать, что векторы $e_1, e_2, ..., e_n, ...$ образуют ортонормированную систему. Действительно, если $\lambda_i \neq \lambda_j$, то $e_i \perp e_j$ по лемме 18.1. Если же $\lambda_i = \lambda_j$, то в пределах конечномерного собственного подпространства, отвечающего собственному значению $\lambda = \lambda_i = \lambda_j$, следует провести процесс ортогонализации. Нормировка собственных векторов завершит построение.

Множество всевозможных конечных линейных комбинаций собственных векторов $e_1, e_2, ..., e_n, ...$ обозначим $\mathscr{L} = \mathscr{L}(e_1, e_2, ..., e_n, ...)$. Очевидно, что $\mathscr{L}$ является линейным многообразием в H. Тогда замыкание $\overline{\mathscr{L}} = \mathcal{L}$ будет подпространством H. Заметим также, что ортонормированная система векторов $\{e_1, e_2, ..., e_n, ...\}$ полна в $\mathcal{L}$ и, следовательно, замкнута в $\mathcal{L}$.

Всякий элемент $x \in H$ по теореме о проекциях однозначно представим в виде $x = y + h$, где $y \in \mathcal{L}$ и $h \in \mathcal{L}^{\perp}$. Элемент y разложим в ряд Фурье $y = \sum_j (y, e_j)e_j = \sum_j (x, e_j)e_j$.

Покажем, что $Ah = \Theta$. Заметим, что оператор $A : \mathscr{L} \to \mathscr{L}$. Следовательно, в силу непрерывности $A : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$. Тогда по лемме 18.1 $A : \mathcal{L}^{\perp} \to \mathcal{L}^{\perp}$. Будем рассматривать $\mathcal{L}^{\perp}$ как самостоятельное гильбертово пространство и предположим, что оператор A в $\mathcal{L}^{\perp}$ ненулевой. Определим

$$\|A\|_{\mathcal{L}^{\perp}} = \sup_{z \in \mathcal{L}^{\perp}, \|z\|=1} \|Az\| > 0\,.$$

В силу следствия 18.1 оператор A в $\mathcal{L}^{\perp}$ имеет собственный вектор $e_0 \in \mathcal{L}^{\perp}$ с собственным значением $\lambda_0 = \|A\|_{\mathcal{L}^{\perp}}$ или $\lambda_0 = -\|A\|_{\mathcal{L}^{\perp}}$. Но по построению $\mathcal{L}^{\perp}$ не содержит ни одного собственного вектора с ненулевым собственным значением. Следовательно, $\|A\|_{\mathcal{L}^{\perp}} = 0$, то есть оператор A в $\mathcal{L}^{\perp}$ нулевой, и $Ah = \Theta$. ♡

Следствие 18.3. *Пусть H – гильбертово пространство, и задан оператор $A = A^* \in \sigma(H)$. Тогда всякий элемент $y \in R(A)$ допускает разложение по ортонормированной системе собственных элементов оператора A с ненулевыми собственными значениями.*

Доказательство. Возьмем $y = Ax$, где $x \in H$. По теореме 18.1 выполняется $x = \sum_j (x, e_j)e_j + h$, где $Ah = \Theta$, а $Ae_j = \lambda_j e_j$ и $\lambda_j \neq 0$. Таким образом,

$$y = Ax = \sum_j (x, e_j)Ae_j + Ah = \sum_j \lambda_j (x, e_j)e_j\,. \qquad ♡$$

Теорема 18.2. *Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство, и оператор $A = A^* \in \sigma(H)$. Тогда оператор A обладает полной ортонормированной системой собственных векторов.*

Доказательство. Рассмотрим определенные в теореме 18.1 подпространства $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}^{\perp}$. Если H сепарабельное пространство, то и всякое его подпространство также сепарабельно. Тогда в $\mathcal{L}^{\perp}$ методом ортогонализации можно построить полную ортонормированную систему $\{e'_1, e'_2, ..., e'_n, ...\}$. Вместе с уже построенной в $\mathcal{L}$ системой векторов $\{e_1, e_2, ..., e_n, ...\}$ получается полная ортонормированная система во всем пространстве H. Действительно, если $x \in H$, то $x = x' + x''$, где $x' \in \mathcal{L}$ и $x'' \in \mathcal{L}^{\perp}$. Заметим, что $x' = \sum_i (x', e_i)e_i$ и $x'' = \sum_j (x'', e'_j)e'_j$. Тогда

$$x = \sum_i (x', e_i)e_i + \sum_j (x'', e'_j)e'_j = \sum_i (x, e_i)e_i + \sum_j (x, e'_j)e'_j\,.$$

то есть x разлагается в ряд Фурье по объединенной системе.

Итак, объединенная система $\{e_i\}_i \cup \{e'_j\}_j$ полна в пространстве H. Кроме того, $Ae_i = \lambda_i e_i$ для $\lambda_i \neq 0$ и $Ae'_j = \Theta = 0e'_j$ для $\lambda'_j = 0$. $\heartsuit$

§ 19. Интегральный оператор Фредгольма с симметричным ядром

В вещественном гильбертовом пространстве $L_2(a, b)$ рассмотрим оператор

$$Ax(t) = \int_a^b K(t, s)x(s)\,ds\,. \tag{19.1}$$

Как и в § 14, считаем, что функция $K(t, s) \in L_2(D)$, где $D = [a, b] \times [a, b]$. Тогда определен

$$\int_a^b \int_a^b |K(t, s)|^2\,dtds = B^2 < \infty\,.$$

Как было установлено, оператор $A : L_2(a, b) \to L_2(a, b)$ является линейным, вполне непрерывным и $\|A\| \leq B$. Кроме того, для сопряженного оператора $A^* : L_2(a, b) \to L_2(a, b)$ справедливо представление

$$A^*y(t) = \int_a^b K(s, t)y(s)\,ds\,.$$

Если предположить, что $K(t, s) = K(s, t)$ почти всюду на D, то есть симметричность функции $K(t, s)$, то получим $A = A^*$. Таким образом, в гильбертовом пространстве $L_2(a, b)$ оператор $A = A^* \in \sigma(L_2(a, b))$. Следовательно, учитывая сепарабельность пространства $L_2(a, b)$ (см. [10]) и теорему 18.2, в случае симметричного ядра $K(t, s)$ у оператора (19.1) существует полная ортонормированная конечная или счетная система собственных векторов (функций). Далее рассмотрим случай счетной системы собственных функций.

Лемма 19.1. *Пусть A оператор (19.1) в пространстве $L_2(a,b)$ является самосопряженным и вполне непрерывным. Пусть $\{e_1, e_2, ...\}$ – полная ортонормированная система собственных функций оператора A, а $\{\lambda_1, \lambda_2, ...\}$ – соответствующая система собственных чисел. Тогда ряд $\sum_n^\infty \lambda_n^2$ сходится и справедлива оценка $\sum_n^\infty \lambda_n^2 \le B^2$.*

Доказательство. Так как $Ae_n = \lambda_n e_n$, то при почти всех $t \in [a,b]$

$$\int_a^b K(t,s)e_n(s)\,ds = \lambda_n e_n(t)\,.$$

Следовательно, $\lambda_n e_n(t)$ есть коэффициенты Фурье функции $K(t,s)$ при почти всех $t \in [a,b]$. Воспользуемся неравенством Бесселя при $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^{N} |\lambda_n e_n(t)|^2 \le \int_a^b |K(t,s)|^2\,ds\,. \tag{19.2}$$

Неравенство (19.2) интегрируем по $t \in [a,b]$. Получим

$$\sum_{n=1}^{N} \lambda_n^2 \int_a^b |e_n(t)|^2\,dt \le \int_a^b \int_a^b |K(t,s)|^2\,dsdt = B^2\,.$$

Заметим, что $\int_a^b |e_n(t)|^2\,dt = \|e_n\|^2 = 1$, то при произвольном $N \in \mathbb{N}$ установлена оценка $\sum_{n=1}^N \lambda_n^2 \le B^2$. Следовательно, соответствующий ряд сходится и справедлива оценка $\sum_n^\infty \lambda_n^2 \le B^2$.

Теорема 19.1 (Гильберт – Шмидт). *Пусть A оператор (19.1) в $L_2(a,b)$ такой, что $K(t,s) = K(s,t)$ и $\int_a^b |K(t,s)|^2\,ds \le C$. Пусть $y \in R(A)$. Тогда ряд Фурье функции $y(t)$ по собственным функциям оператора A сходится к $y(t)$ абсолютно и равномерно.*

Доказательство. Пусть $\{e_1, e_2, ...\}$ – полная ортонормированная система собственных функций оператора A, а $\{\lambda_1, \lambda_2, ...\}$ – соответствующая система собственных чисел. Пусть $y = Ax$, где $x \in L_2(a,b)$. Рассмотрим ряд Фурье

$$\sum_{i=1}^{\infty}(y,e_i)e_i(t) = \sum_{i=1}^{\infty}(Ax,e_i)e_i(t) = \sum_{i=1}^{\infty}(x,Ae_i)e_i(t) = \sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i(x,e_i)e_i(t)\,.$$

По следствию 18.3

$$\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i(x,e_i)e_i(t) = y(t)\,. \tag{19.3}$$

Докажем, что ряд (19.3) сходится абсолютно и равномерно. Воспользуемся неравенством Коши при произвольных $n, p \in \mathbb{N}$.

$$\left(\sum_{i=n+1}^{n+p} |\lambda_i(x,e_i)e_i(t)|\right)^2 \le \sum_{i=n+1}^{n+p} |(x,e_i)|^2 \cdot \sum_{i=n+1}^{n+p} |\lambda_i e_i(t)|^2\,. \tag{19.4}$$

Из оценки (19.2) следует оценка

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i e_i(t)|^2 \le \int_a^b |K(t,s)|^2\, ds \le C\,,$$

с учетом которой из (19.4) получим

$$\Bigl(\sum_{i=n+1}^{n+p} |\lambda_i (x, e_i) e_i(t)| \Bigr)^2 \le C \sum_{i=n+1}^{n+p} |(x, e_i)|^2 \,. \tag{19.5}$$

Напомним, что для $x \in L_2(a,b)$ ряд $\sum_{i=1}^{\infty} |(x, e_i)|^2$ в силу неравенства Бесселя сходится. Таким образом, отсюда и оценки (19.5) получили для ряда (19.3) выполнение критерия Коши абсолютной и равномерной сходимости. ♡

Замечание. Если функция $K(t,s)$ в квадрате D непрерывна, то, как показано в § 16, оператор $A : L_2(a,b) \to C[a,b]$. Отсюда в частности следует, что в этом случае все собственные функции $e_i(t)$ с ненулевыми собственными значениями являются непрерывными.

• Задача.

19.1. Найти собственные функции и соответствующие собственные значения для оператора Фредгольма (19.1):

$$1)\ \ [a,b] = [0,\pi], \quad K(t,s) = \cos(t+s)\,;$$

$$2)\ \ [a,b] = [0,1], \quad K(t,s) = \begin{cases} t(1-s), & 0 \le t \le s \le 1 \\ s(1-t), & 0 \le s \le t \le 1 \end{cases}\ ;$$

$$3)\ \ [a,b] = [0,\pi], \quad K(t,s) = \begin{cases} \cos t \sin s, & 0 \le t \le s \le \pi \\ \cos s \sin t, & 0 \le s \le t \le \pi \end{cases}\ .$$

Список литературы

[1] *Антоневич А.Б.* Функциональный анализ и интегральные уравнения / А.Б. Антоневич, Я.В. Радыно. – Минск : БГУ, 2003. – 431 с.

[2] *Ахиезер Н.И.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве / Н.И. Ахиезер, И.М. Глазман. – М. : Наука, 1966. – 544 с.

[3] *Данфорд Н.* Линейные операторы. Общая теория / Н. Данфорд, Дж.Т. Шварц. – М. : Из-во иност. лит., 1962. – 896 с.

[4] *Данфорд Н.* Линейные операторы. Спектральная теория / Н. Данфорд, Дж.Т. Шварц. – М. : Мир, 1966. – 1064 с.

[5] *Данфорд Н.* Линейные операторы. Спектральные операторы / Н. Данфорд, Дж.Т. Шварц. – М. : Мир, 1974. – 662 с.

[6] *Иосида К.* Функциональный анализ / К. Иосида. – М. : Мир, 1967. – 624 с.

[7] *Канторович Л.В.* Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М. : Наука, 1977. – 742 с.

[8] *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов / Т. Като. – М. : Мир, 1972. – 740 с.

[9] *Кириллов А.А.* Теоремы и задачи функционального анализа / А.А. Кириллов, А.Д. Гвишиани. – М. : Наука, 1979. – 384 с.

[10] *Колмогоров А.Н.* Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М. : Наука. 1976. – 544 с.

[11] *Люстерник Л.А.* Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. – М. : Наука. 1965. – 520 с.

[12] *Люстерник Л.А.* Краткий курс функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. – М. : Высшая школа, 1982. – 272 с.

[13] *Рисс Ф.* Лекции по функциональному анализу / Ф. Рисс, Секефальви-Надь Б. – М. : Мир, 1979. – 592 с.

[14] *Рудин У.* Функциональный анализ / У. Рудин. – М. : Мир, 1975. – 448 с.

[15] *Треногин В.А.* Функциональный анализ / В.А. Треногин. – М. : Физматлит, 2002. – 496 с.

[16] *Треногин В.А.* Задачи и упражнения по функциональному анализу / В.А. Треногин, Б.М. Писаревский, Т.С. Соболева. – М. : Физматлит, 2002. – 496 с.

[17] *Шилов Г.Е.* Математический анализ. Специальный курс / Г.Е. Шилов. – М. : Физматгиз, 1960. – 388 с.

[18] *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа: в 3 т. / Л.Д. Кудрявцев. – М. : Высшая школа, 1988. – Т. 2. – 576 с.

Учебное издание

Смагин Виктор Васильевич

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ФУНКЦИОНАЛЫ

Учебное пособие для вузов

Редактор И.Г. Валынкина

Подписано в печать 11.11.11. Формат 60×84/16.
Усл. печ. л. 4,36. Тираж 100 экз. Заказ 1159.

Издательско-полиграфический центр
Воронежского государственного университета.
394000, г. Воронеж, пл. им. Ленина, 10. Тел. (факс): +7 (473) 2-598-026
http://www.ppc.vsu.ru; e-mail: pp_center@ppc.vsu.ru

Отпечатано в типографии
Издательско-полиграфического центра
Воронежского государственного университета.
394000, г. Воронеж, ул. Пушкинская, 3. Тел. 2-204-133