Заочный тур (10-11 классы)

Задание 1. Найти наибольшую разность между корнями квадратного уравнения $x^2-2x\sin^2\alpha-\cos^4\alpha=0$, которую можно получить, меняя параметр α?

Решение. Дискриминант $D=4(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)$

$$|x_1-x_2|=\sqrt{D}=2\sqrt{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha}=2\sqrt{\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=2\sqrt{1-\frac{\sin^2 2\alpha}{2}}$$

$|x_1-x_2|_{\max}$ достигается при $\sin^2 2\alpha=0$ и равна 2. Например, при $\alpha=0$ уравнение $x^2-1=0$ имеет корни $x_1=1;\ x_2=-1$, расстояние между которыми равно 2.

Ответ: 2.

Задание 2. Последовательность $\{a_n\}$ задана соотношением $a_{n+1}=a_n-a_{n-1}$. Найдите a_{2023}, если $a_1=3$.

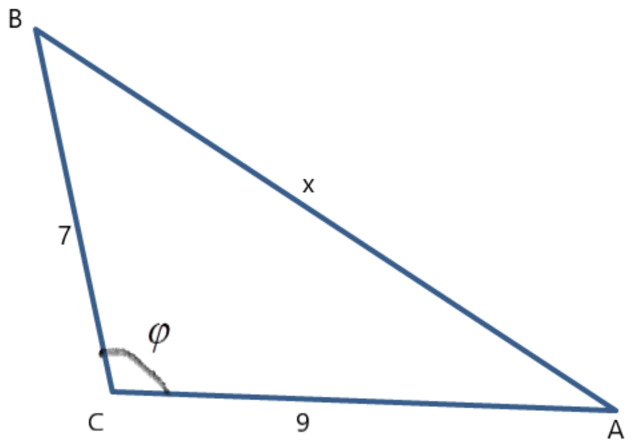
Решение. Заметим, что $a_{n+3}=a_{n+2}-a_{n+1}=-a_n$

То есть $a_{n+3}=-a_n$, тогда $a_{n+6}=-a_{n+3}=a_n$. Так как 2023 при делении на 6 дает остаток равный 1, то $a_{2023}=a_{1+337\cdot 6}=a_1=3$.

Ответ: 3.

Задание 3. В треугольнике ABC известны длины двух сторон $BC=7;\ AC=9$. Площадь треугольника ABC равна $14\sqrt{5}$. Сторона AB больше удвоенной медианы, проведенной к ней. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник ABC. (В ответе укажите удвоенный квадрат радиуса)

Решение. Обозначим $AB=x$; $\angle BCA=\varphi$



$$\begin{cases} x^2=49+81-2\cdot 7\cdot 9\cdot\cos\varphi \\ S=14\sqrt{5}=\frac{1}{2}\cdot 7\cdot 9\cdot\sin\varphi=\frac{1}{2}\left(AB+BC+AC\right)\cdot r \end{cases}$$

Здесь r - радиус окружности, вписанной в треугольник ABD

$$\sin\varphi=\frac{28\sqrt{5}}{63}=\frac{4\sqrt{5}}{9};$$

$$|\cos\varphi|=\sqrt{1-\frac{80}{81}}=\frac{1}{9}$$

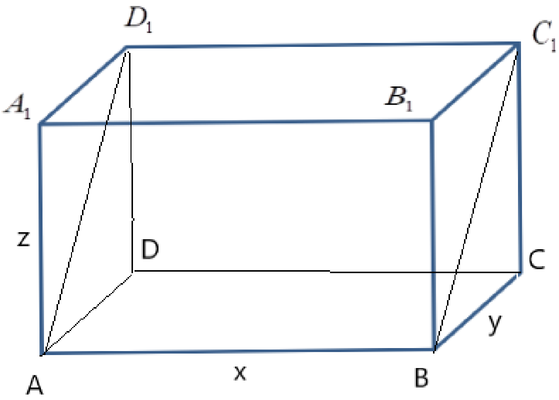
По условию угол φ тупой (медиана меньше AB); $\cos\varphi=-\frac{1}{9}$

$$x^2=49+81-2\cdot 7\cdot 9\cdot\left(-\frac{1}{9}\right)=144,\ x=12.$$

$$r=\frac{2S}{7+9+12}=\frac{28\sqrt{5}}{28}=\sqrt{5}$$

<u>Ответ:</u>10

<u>Задание 4</u>. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, площади диагональных сечений которого равны $\sqrt{13};\ 2\sqrt{10};\ 3\sqrt{5}$.



<u>Решение</u>.

$$S_{BB_1D_1D}=\sqrt{13};\ S_{ADC_1B_1}=3\sqrt{5};\ S_{ABC_1D_1}=2\sqrt{10}.$$

$$AB=x;\ BC=y;\ AA_1=z$$

$$BD^2=x^2+y^2;\ AB_1=x^2+z^2;\ A_1D^2=y^2+z^2$$

$$S_{BB_1D_1D}=\sqrt{x^2+y^2}\,z=\sqrt{13};\ S_{ADC_1B_1}=\sqrt{x^2+z^2}\,y=3\sqrt{5};$$
$$S_{ABC_1D_1}=\sqrt{y^2+z^2}\,x=2\sqrt{10}.$$

$$\begin{cases}(x^2+y^2)z^2=13\\(x^2+z^2)y^2=45;\\(y^2+z^2)x^2=40\end{cases}\quad \begin{cases}x^2z^2+y^2z^2=13; & (1) & (1)+(2)-(3);\\x^2y^2+x^2z^2=40; & (2) & (2)+(3)-(1);\\x^2y^2+y^2z^2=45; & (3) & (1)+(3)-(2);\end{cases}$$

$$\begin{cases}2x^2z^2=8\\2x^2y^2=72;\\2y^2z^2=18\end{cases}\quad\begin{cases}xz=2\\xy=6\\yz=3\end{cases}$$

$$V_{ABCDA_1B_1C_1D_1}=xyz=\sqrt{x^2y^2z^2}=\sqrt{xz\cdot xy\cdot yz}=\sqrt{36}=6.$$

<u>Ответ: </u>6.

<u>Задание 5</u>. В каждую клетку таблицы 4×4 записано положительное число. При этом сумма чисел в каждой строке, кроме первой, на 3 больше, чем в предыдущей, и сумма чисел в каждом столбце, кроме первого, в 3 раза больше, чем в предыдущем. Найдите сумму чисел во втором столбце, если известно, что она равна сумме чисел в какой-то строке. (В ответе укажите сумму, увеличенную в 21 раз)

Решение. Суммы чисел в строках $x, x+3, x+6, x+9$, а в столбцах $y, 3y, 9y, 27y$. Сумма по всей таблице $4x+18=40y;\ y=\frac{1}{10}x+\frac{9}{20}$. Сумма во втором столбце: $\frac{3}{10}x+\frac{27}{20}=x<x+3;$ следовательно, сумма 2-го столбца равна сумме первой строки $\frac{3}{10}x+\frac{27}{20}=x;\quad 7x=\frac{27}{2};\quad x=\frac{27}{14}$. Приведем пример такой таблицы (рис.1)

$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{9}{14}$	$\frac{14}{14}$
$\frac{2}{14}$	$\frac{6}{14}$	$\frac{18}{14}$	$\frac{43}{14}$
$\frac{3}{14}$	$\frac{9}{14}$	$\frac{27}{14}$	$\frac{72}{14}$
$\frac{3}{14}$	$\frac{9}{14}$	$\frac{27}{14}$	$\frac{44}{14}$

Рис. 1

Ответ: 40.5

Задание 6. На заводе было несколько одинаковых прессов, штампующих детали и завод выпускал 6480 деталей в день. После реконструкции все прессы заменены на более производительные, а их количество увеличилось на 3. Завод стал выпускать 11200 деталей в день. Сколько прессов было на заводе первоначально?

Решение. Пусть на заводе имелось n- прессов, Тогда производительность одного пресса равнялась $\frac{6480}{n}$. Соответствующие показатели после реконструкции составили $n+3$ и $\frac{11200}{n+3}$. Все числа натуральные: $6480=2^4\cdot 3^4\cdot 5;\ \ 11200=2^6\cdot 5^4\cdot 7$. Так как $11200 \not\vdots\, 3$, то $n+3 \not\vdots\, 3$, следовательно, $n \not\vdots\, 3$. Тогда из разложения $6480\colon \mathrm{n}=2^k\cdot 5;\ \ k=0,1,2,3,4.$

Но по условию $\frac{6480}{n}<\frac{11200}{n+3}$

$k=0; n=5$; $\quad \frac{2^4\cdot 3^4\cdot 5}{5}<\frac{2^6\cdot 5^2\cdot 7}{8};\ \ 3^4<\frac{5^2\cdot 7}{2};\ \ 162<175$

$k=1; n=10$; но $11200=2^6\cdot 5^2\cdot 7 \not\vdots\, \mathrm{n}+3=13.$

$k=2; n=20$; но $11200=2^6\cdot 5^2\cdot 7 \not\vdots\, \mathrm{n}+3=23.$

$k = 3; n = 40$; но $11200 = 2^6 \cdot 5^2 \cdot 7 \not\vdots\, 43 = n + 3.$

$k = 4; n = 80$; но $11200 = 2^6 \cdot 5^2 \cdot 7 \not\vdots\, 83 = n + 3.$

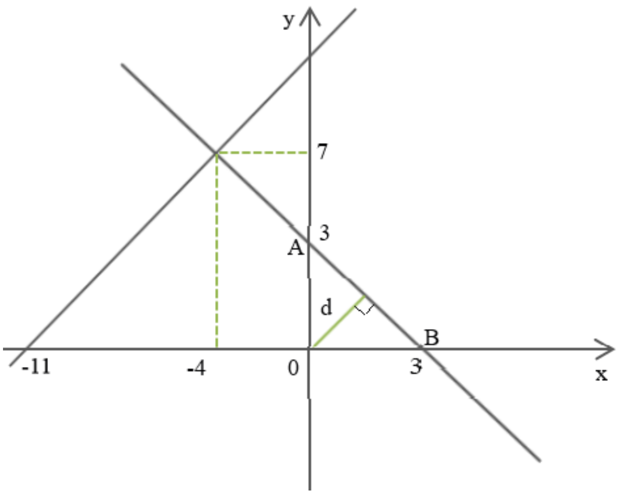
<u>Ответ:</u> 5

<u>Задание 7</u>. Пусть числа x и y удовлетворяют соотношению $x^2 - y^2 + 8x + 14y - 33 = 0$. Найти наименьшее значение выражения $x^2 + y^2$.

<u>Решение</u>. Преобразуем уравнение к виду $(x - y + 11)(x + y - 3) = 0$

Следовательно, множество точек на плоскости Oxy, коэффициенты которых удовлетворяют исходному уравнению, является объединение прямых

$y = x + 11; \quad y = -x + 3$



пересекающихся под прямым углом в точке (-4,7).

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot d; \quad d = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\left(x^2 + y^2\right)_{\min} = d^2 = \frac{9}{2}$$

<u>Ответ: 4.5</u>

<u>Задание 8</u>. Две вершины квадрата лежат на оси абсцисс, а две другие на кривой $y = x - x^2$. Вычислить площадь квадрата. (В случае наличия нескольких ответов укажите их сумму квадратов) .

<u>Решение</u>. Пусть абсцисса одной из вершин квадрата равна x, другой $x + a$.

Тогда длина стороны квадрата равна $|a|$, а площадь a^2

Вертикальные стороны квадрата равны между собой и равны горизонтальным:

$$\begin{cases} x-x^2=(x+a)-(x+a)^2 \\ x-x^2=a \end{cases}; \quad \begin{cases} a=1-2x \\ x-x^2=1-2x \end{cases}; \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{5}\right) \\ a=2-\sqrt{5} \end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{1}{2}\left(3-\sqrt{5}\right) \\ a=-2+\sqrt{5} \end{cases} \end{array}\right.$$

Тогда искомая площадь равна $9+4\sqrt{5}$ или $9-4\sqrt{5}$.

<u>Ответ: 322</u>