Заочный тур (7 класс)

Задание 1. Часы со стрелками показывают 8 часов, 0 минут, 0 секунд. Через сколько секунд секундная стрелка в третий раз поравняется с минутной? При необходимости ответ округлите до целого числа секунд. Считайте, что минутная стрелка меняет своё значение раз в минуту (по достижении секундной стрелкой отметки 12), а остальное время остаётся неподвижной.

Решение. Скорость секундной стрелки 1 деление в секунду, а скорость минутной стрелки в 60 раз меньше, т.е. 1/60 делений в секунду. Скорость сближения стрелок будет составлять $\left(1-{}^{1}/_{60}\right)={}^{59}/_{60}$ делений в секунду.

В начальный момент времени секундная и минутная стрелки уже поравнялись друг с другом, поэтому для того, чтобы они в третий раз поравнялись друг с другом, секундная стрелка должна пройти 120 делений.

$$t=\frac{S}{v}=\frac{120}{{}^{59}/_{60}}=122 \text{ секунды.}$$

Ответ: 122.

Задание 2. Каким количеством нулей оканчивается десятичная запись числа 2023! ? (n! – факториал числа n, он равен произведению первых n натуральных чисел: $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n$. Например, 3!=6, 4!=24, 5!=120 и т.д.)

Решение. Количество 0 в конце десятичной записи числа равно максимальной степени 10, которая входит в разложение числа 2023! на множители. 10=2×5, чисел, делящихся на 2, больше, чем чисел, делящихся на 5, значит, искомое количество нулей будет совпадать со степенью 5 в разложении числа 2023!. В произведении чисел от 1 до 2023 будет 404 числа кратных 5, 80 чисел кратных 25, 16 чисел кратных 125, 3 числа кратных 625. Тогда степень 5, входящая в разложение 2023! будет равна 404+80+16+3=503.

Ответ: 503.

Задание 3. На каждом километре дороги между городами Воронеж и Елец стоит столб с табличкой, на одной стороне которой указано, сколько километров до Воронежа, а на другой – до Ельца. Проезжая мимо столба Петя заметил, что на одной стороне таблички отмечено двузначное число, сумма цифр которого равна 8, а на другой стороне число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Проехав ещё 18 км, Петя очень удивился, увидев на столбе те же числа, подумав, он сумел выяснить причину этого факта и определить расстояние между городами Воронеж и Елец. Чему равно это расстояние?

Решение. Обозначим числа на табличках: $10x+y$ и $10y+x$ соответственно (пусть $10x+y$ – большее число), по условию $x+y=8$. Тогда через 18 км на первой стороне таблички будет $10x+y-18$. По условию $10x+y-18=10y+x$, следовательно, $x-y=2$.

Так как $x+y=8$, $x-y=2$, то $x=5$, $y=3$. Значит, 53+35=88 (км) – расстояние между городами Воронеж и Елец.

Ответ: 88.

Задание 4. Опросили группу человек, среди которых рыцарей и лжецов поровну. На вопрос: «Сколько среди вас лжецов?» – каждый дал ответ: «Не менее пяти» или «Не менее восьми». На вопрос: «Сколько среди вас рыцарей?» – каждый дал ответ: «Не более шести» или «Не более девяти». Сколько человек в опрашиваемой группе?

Решение. Обозначим число лжецов, а значит и число рыцарей, через x. Рассмотрим ответы на первый вопрос. Их можно записать в виде $x\geq5$ и $x\geq8$, где только один верный. Если верным является второй ответ, то из того, что первый неверен, получаем $x<5$. Но тогда одновременно должно выполняться $x<5$ и $x\geq8$, что невозможно. Тогда верным является первый ответ, и получаем $5\leq x<8$, то есть возможные значения x будут 5, 6, 7.

Рассмотрим ответы на второй вопрос. Их можно записать в виде $x \leq 6$ и $x \leq 9$. Рассуждая аналогично предыдущему пункту, получаем, что $6 < x \leq 9$. Отсюда возможные значения x будут 7, 8, 9.

Единственным общим числом в обоих случаях является 7, значит в группе 14 человек.

Ответ: 14.

Задание 5. Найдите наименьшую возможную сумму 10 различных натуральных чисел, таких, что произведение любых 5 из них четно, а сумма всех 10 чисел нечетна.

Решение. Поскольку произведение любых 5 чисел из набора четно, то нечетных чисел меньше 5. Так как сумма всех чисел нечетна, то в наборе нечетное число нечетных чисел. Значит, нечетных чисел либо три, либо одно. Сумма чисел набора будет наименьшей, если мы возьмем первые подряд идущие четные и нечетные числа. Причем, нечетных чисел нужно брать три, а не одно, так как $2+4+\ldots+14+1+3+5<2+4+\ldots 18+1$. Таким образом, наименьшая сумма $2+4+6+8+10+12+14+1+3+6=65$.

Ответ: 65.

Задание 6. Найдите число α, если известно, что точки

$$A\left(\frac{\alpha-1}{2},\alpha\right), B(3,-3) \text{ и } C\left(-\frac{1}{3},7\right)$$

лежат на одной прямой. (В развёрнутом ответе обязательно необходимо записать уравнение найденной прямой).

Решение. Подставим координаты известных точек в уравнение прямой $y = ax + b$:

$$\begin{cases} -3 = 3a + b \\ 7 = -\dfrac{1}{3}a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 6 \end{cases}.$$

Значит, уравнение прямой: $y = -3x + 6$. Тогда искомое значение числа α определяется из уравнения: $\alpha = -3 \cdot \frac{\alpha-1}{2} + 6 \Rightarrow \alpha = 3$.

Ответ: 3.

Задание 7. В клетках таблицы 6 на 6 стоят числа так, что каждое число равно среднему арифметическому своих соседей (чисел в клетках с общими сторонами). Сумма чисел в нижней строке равна 30. Чему равна сумма чисел в угловых клетках?

Решение. Рассмотрим наибольшее число, приведенное в таблице. Его соседи не больше его. Поэтому если хоть одно из соседних чисел меньше выбранного, то и среднее арифметическое соседей будет меньше выбранного, что противоречит условию задачи. Поэтому все соседи этого числа равны данному числу и их соседи тоже. Значит, все числа в таблице одинаковые. Поскольку сумма чисел в последней строке равна 30, то каждое число в таблице равно 5. Значит, сумма чисел в угловых клетках равна 20.

Ответ: 20.

Задание 8. Ученик шестого класса Василий шёл в школу через лес вверх вдоль ручья со скоростью в два раза большей скорости течения. Повторяя в голове выученный стих, он случайно уронил в ручей носовой платок. Вскоре, обнаружив потерю, Василий, бросив имевшуюся в руках палку в ручей, побежал назад за платком со скоростью втрое большей, чем шёл в школу. Догнав плывший платок, он схватил его, повернулся и пошёл обратно вверх в школу с первоначальной скоростью. Через 15 минут после этого Василий встретил плывущую по ручью палку. На сколько часов раньше Василий пришёл бы в школу, если бы не догонял утерянный платок?

Решение. Пусть S – расстояние, которое прошёл Василий с момента утери платка и до обнаружения пропажи. Если x – скорость течения ручья, то $2x$ – скорость Василия на подъёме в школу, а $6x$ – скорость бега Василия до перехвата им утерянного платка. Тогда время, затраченное на перехват платка, составляет:

$$\frac{S + x \cdot \frac{S}{2x}}{6x} = \frac{S}{4x}.$$

Общее расстояние с момента обнаружения пропажи платка до его перехвата составляет:

$$S + x \cdot \frac{S}{2x} = \frac{3}{2}S.$$

Анализ перемещения палки по ручью показывает, что она преодолела расстояние до момента её обнаружения Василием:

$$\left(\frac{15}{60} + \frac{S}{4x}\right) \cdot x.$$

Так как палка была обнаружена спустя 15 минут после перехвата платка, то с другой стороны общее расстояние составляет:

$$\frac{15}{60} \cdot 2x + \left(\frac{15}{60} + \frac{S}{4x}\right) \cdot x.$$

Таким образом:

$$\frac{15}{60} \cdot 2x + \left(\frac{15}{60} + \frac{S}{4x}\right) \cdot x = \frac{3}{2}S.$$

Откуда: $3x = 5S \;\Rightarrow\; \frac{S}{x} = 0{,}6$.

В итоге время, которое потерял Василий на поход в школу в виду потери, составляет:

$$\frac{S}{4x} + \frac{\frac{3}{2}S}{2x} = \frac{S}{x} = 0{,}6 \text{ часа}.$$

Ответ: 0,6.