Заочный тур (8-9 классы)

Задание 1. Вычислить сумму

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}.$$

Решение. Умножая все дроби на сопряжённое к знаменателю выражение (сопряжённым к $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ называется выражение $\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$), приходим к сумме $\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{100}-\sqrt{99}$, которая после всех взаимных уничтожений приводится к $\sqrt{100}-1=9$.

Ответ: 9.

Задание 2. Вычислить $\left(5\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\sqrt{53-10\sqrt{6}}$.

Решение. Второй множитель приводится к виду $\sqrt{53-10\sqrt{6}}=\sqrt{(\sqrt{50})^2-2\cdot 5\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{\left(5\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2}=5\sqrt{2}-3.$

В силу этого исходное выражение равно $\left(5\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(5\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)=47$.

Ответ: 47.

Задание 3. Сколько существует таких натуральных чисел a в диапазоне от 0 до 100, что уравнение $x^2+3y+a=0$ имеет решения в натуральных числах?

Решение. Так как сумма натуральных чисел является натуральным числом, то уравнение не имеет решений в натуральных числах, и чисел a, удовлетворяющих условию задачи, не существует.

Ответ: 0.

Замечание к Заданию 3. Отметим, что ответ будет иным, если в условии допустить решение в целых числах (т.е. x и y — целые).

Действительно, квадрат целого числа либо делится на 3, либо даёт при делении на 3 остаток 1. Рассмотрим подробнее. Пусть $x=3t+r$, где $r=0{,}1{,}2$ (любое целое число делится на 3 с остатком 0, 1, или 2). Тогда

$$(3t+r)^2+3y+a=9t^2+6tr+r^2+3y+a=0,$$

откуда получаем, что $3y = -9t^2 - 6tr - (r^2 + a)$, и для разрешимости уравнения в целых числах $r^2 + a$ должно быть кратно 3. Далее, r^2 принимает значения 0, 1 или 4. Следовательно, a при делении на 3 дает остаток 0 или 2. Таким образом, при всех a, кроме тех, которые при делении на 3 дают остаток 1, исходное уравнение имеет решения в целых числах (можно убедиться, рассмотрев все случаи $r = 0,1,2$). Все «плохие» a содержатся в формуле $a = 3k + 1$. В указанном диапазоне содержится 34 таких числа (1, 4, 7, ... 100). Поэтому «хороших» a остаётся 66.

Задание 4. Известно, что дробь $\frac{m}{n}$ несократимая (n, m — целые числа), а дробь $\frac{2n+3m}{n-m}$ — сократимая. На какие натуральные числа сократима эта дробь?

Решение. Целые числа $a,\ b$ имеют такой же наибольший общий делитель, как числа $a,\ b - ka$ при любом целом k. Поэтому $\text{НОД}(2n + 3m, n - m) = \text{НОД}(5n, m - n) = \text{НОД}(5n, 5m) = 5$. Последнее равенство верно в силу того, что n, m — взаимно простые числа, поскольку дробь $\frac{n}{m}$ предполагалась несократимой. Таким образом, вторая дробь сократима на 5.

Ответ: 5.

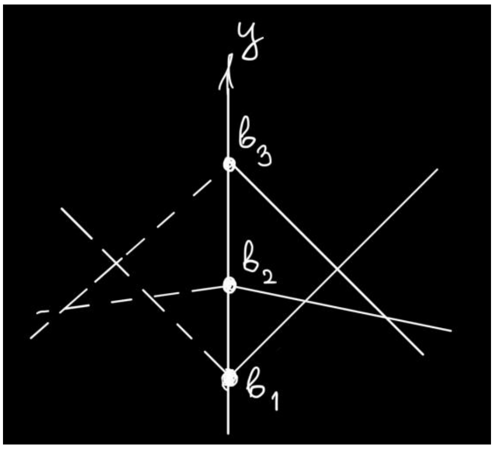
Задание 5. Сколько делителей (включая единицу и само число) имеет число 2023^3?

Решение. Число 2023 раскладывается на простые множители так $7 \cdot 17^2$. Поэтому $2023^3 = 7^3 \cdot 17^6$. В силу этого все делители числа 2023^3 имеют вид $7^m \cdot 17^n$ при $0 \le m \le 3,\ 0 \le n \le 6$. Всего имеется 28 пар таких чисел.

Ответ: 28.

Задание 6. Найти максимальное число частей, на которые графики трёх функций вида: $y = a_i|x| + b_i$, $i = 1,2,3$ разбивают плоскость xOy .

Решение. Все части расположены симметрично относительно оси Oy (поскольку графики функций симметричны относительно неё). Те из них, которые не пересекаются с этой осью - назовём их побочными, фигурируют в общей сумме симметричными парами, а те, которые пересекают эту ось - назовём их центральными, входят в эту сумму один раз. Чтобы увеличить число последних, достаточно, чтобы точки излома графиков (они имеют вид $(0, b_i)$) не совпадали (т.е. числа b_i должны быть попарно различны), тогда их будет 4. Далее заметим, что график каждой из функций выглядит как пара лучей, выходящих из общей точки на оси Oy . Для максимизации общего числа частей нужно потребовать, чтобы, например, лучи, находящиеся справа от оси (они изображены сплошными линиями) были попарно не параллельными и три луча не проходили бы через одну точку.



Очевидно тогда, что число побочных частей справа равно 3; более трёх областей третий луч не может пересечь (на рисунке третий луч, выходящий из точки с ординатой b_i пересекает две центральные области и одну побочную). С учётом всего сказанного получаем, что максимальное число частей, на которые график рассматриваемых функций разбивают плоскость, равно $4 + 2 \cdot 3 = 10$.

Ответ: 10.

Задание 7. Жилой микрорайон имеет форму прямоугольной полосы из трёх улиц, идущих с запада на восток и 2023 переулков, пересекающих эти улицы с юга на север. Сколько существует маршрутов, ведущих из юго-западного угла микрорайона в северо-восточный, если можно двигаться только на восток и на север?

Решение. Все маршруты соединяющие указанные две точки можно закодировать последовательностью букв ВВСВВ…СВВ длины 2023+2, в которой ровно две буквы С (север). Таким образом, среди 2025 мест нужно зарезервировать 2 места для букв С. Остальные предназначены для букв В (восток). Для расположения первой буквы имеется 2025 возможностей, а для второй 2024 возможности. Поэтому, если бы буквы С были различимы (как первая и вторая), то тогда было бы $2024 \cdot 2025$ возможностей, а поскольку перестановки двух букв С ничего не меняют в маршруте движения, то нужно последнее число поделить на два. Следовательно, всего существует $1012 \cdot 2025 = 2049300$ различных маршрутов.

Ответ: 2049300.

Задание 8. Выпишите все числа α, не большие 100, при которых существуют ненулевые многочлены P, для которых имеет место тождество $P(x) \equiv \alpha P\left(\frac{x}{2}\right)$.

(В случае нескольких таких чисел α укажите их сумму).

Решение. Рассмотрим произвольный многочлен

$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$.

Тождество $P(x) \equiv \alpha P\left(\frac{x}{2}\right)$ можно тогда переписать так

$$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \equiv \alpha \left(\frac{a_n}{2^n} x^n + \cdots + a_1 x + a_0\right).$$

Два многочлена тождественно равны только в случае, если их коэффициенты при одинаковых степенях совпадают. Отсюда:

$$\begin{cases} a_0 = \alpha a_0 \\ a_1 = \alpha \dfrac{a_1}{2} \\ \qquad \ldots \\ a_n = \alpha \dfrac{a_n}{2^n} \end{cases}$$

Если, например, $a_0 \neq 0$, то из первого уравнения следует $\alpha = 1$. Но тогда, чтобы «спасти» остальные уравнения мы вынуждены заключить, что остальные коэффициенты многочлена равны нулю.

Получается, что при $\alpha = 1$ ненулевые многочлены, удовлетворяющие тождеству $P(x) \equiv \alpha P\left(\frac{x}{2}\right)$ существуют, а именно $P(x) \equiv a_0$ при любом ненулевом a_0. Пусть теперь $a_0 = 0$ и пусть теперь a_k первый ненулевой коэффициент многочлена $P(x)$. Из приведенной системы соотношений тогда следует $\alpha = 2^k$. Вновь ради «спасения» этой системы соотношений придётся заключить, что все остальные коэффициенты равны нулю, а многочлен имеет вид $P(x) \equiv a_k x^k$. Таким образом, мы видим, что тождество $P(x) \equiv \alpha P\left(\frac{x}{2}\right)$ с ненулевым многочленом $P(x)$ возможно лишь в случае, если α является степенью двойки. Таким образом, ответом является набор степеней двойки: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64.

Ответ: 127.