Региональная Олимпиада ВГУ по математике 6-7 классы
(заключительный этап)
Решения задач

1. Три трёхзначных числа, в записи которых, участвуют все цифры, кроме нуля, дают в сумме 1665. В каждом числе первую цифру поменяли местами с последней цифрой. Получили три новых трёхзначных числа. Чему равна сумма новых чисел?

Решение. Имеющиеся цифры: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Имеем числа a, b, c, причём $a+b+c=1665$. Попробуем выяснить, какие цифры могут стоять на последних местах в этих числах. Обратим внимание на то, какими могут быть максимальная и минимальная суммы цифр, стоящих в разряде единиц этих чисел. Очевидно, что самая маленькая сумма - это 1+2+3=6, а максимальная - 7+8+9=24. Значит, сумма единиц этих чисел лежит на отрезке от 6 до 24. Однако число 1665 заканчивается на 5, а значит и сумма единиц должна заканчиваться на 5,ибо разряды сотен и десятков повлиять на это не могут. Число, которое оканчивается на 5 и находится между 6 и 24 одно - это 15. Значит, сумма единиц равна 15. Определим, что может стоять на месте десятков и сотен, для этого вычтем единицы в каждом числе, тогда сумма чисел станет равно 1665–15=1650. Проводя абсолютно такие же рассуждения, мы приходим к выводу, что сумма цифр, стоящих в разряде десятков, также лежит в диапазоне от 6 до 24, и оканчивается на 5, а значит, тоже равна 15.

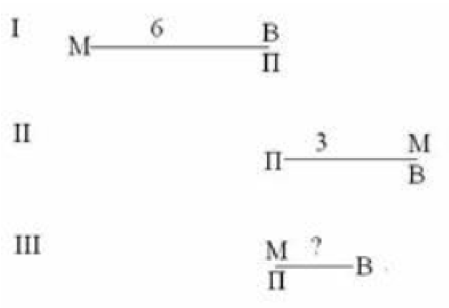
Сумма всех цифр равна 1+2+3+4+5+6+7+8+9=45. Суммы единиц и десятков равны 15, значит, сумма сотен равна 45–15–15=15.

Мы меняем цифры из разряда сотен с цифрами из разряда единиц местами, однако суммы единиц и суммы цифр, стоящих в разряде сотен этих чисел равны 15. То есть при этом действии, хоть мы и получим новые числа, однако суммы единиц, десятков и сотен не изменятся. А значит, в сумме мы получим то же число, что и было изначально, то есть 1665.

Ответ: 1665.

2. Мотоциклист, велосипедист и пешеход движутся по шоссе в одну сторону с постоянными скоростями. Когда велосипедист поравнялся с пешеходом, мотоциклист отставал от них на 6 км. Когда мотоциклист догнал велосипедиста, пешеход отстал от них на 3 км. Какое было расстояние между пешеходом и велосипедистом, когда мотоциклист догнал пешехода?

Решение. Изобразим упомянутые в условии ситуации:



Очевидно, что третье расположение следовало за первым и предшествовало второму. От первой до второй ситуации мотоциклист относительно пешехода проехал $3 + 6 = 9$ километров, а велосипедист относительно пешехода проехал 3 километра. Следовательно, скорость мотоциклиста относительно пешехода больше скорости велосипедиста относительно пешехода в 9/3=3 раза.

Между первой и третьей ситуациями мотоциклист относительно пешехода проехал 6 километров. Так как относительная скорость велосипедиста втрое меньше, то за это же время велосипедист относительно пешехода проедет $6/3 = 2$ километра.

Ответ: 2 километра.

3. Определите остаток от деления многочлена 243-ей степени:

$$x^{243} + x^{81} + x^{27} + x^9 + x^3 + x$$

на многочлен первой степени: $x - 1$.

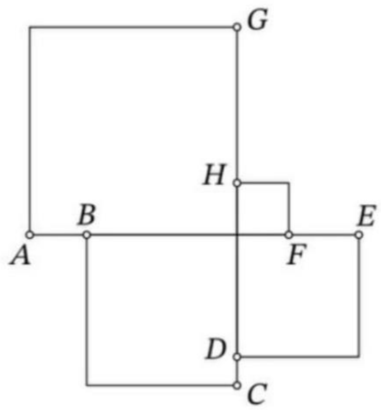
Решение. Уменьшим каждое из слагаемых исходного многочлена на 1, получим:

$$(x^{243} - 1) + (x^{81} - 1) + (x^{27} - 1) + (x^9 - 1) + (x^3 - 1) + (x - 1) + 6.$$

Каждое слагаемое $(x^k - 1)$ делится на $x - 1$, значит, остаток от деления равен 6.

Ответ: 6.

4. На рисунке изображено 4 квадрата. Известно, что длина отрезка *AB* равна 11, длина отрезка *FE* равна 13, длина отрезка *CD* равна 5. Чему равна длина отрезка *GH*?



<u>Решение.</u> Сторона самого большого квадрата (с вершиной A) больше стороны второго по величине квадрата (с вершиной C) на длину отрезка AB равную 11. Аналогично, сторона второго по величине квадрата больше стороны третьего по величине квадрата (с вершиной E) на длину отрезка CD, равную 5. А его сторона больше стороны самого маленького квадрата на длину отрезка EF, равную 13. Итого, сторона большого квадрата больше стороны самого маленького квадрата на длину отрезка GH, равную 11+13+5=29.

Ответ: 29.

5. В финал школьного турнира по настольному теннису вышло 4 человека: Алексей, Виктор, Даниил и Семен. Каждый сыграл дважды с каждым своим соперником. В каждом раунде за победу давалось 1 очко, за ничью 0,5 очка, за поражение 0 очков. Известно, что по окончании турнира все ребята набрали разное количество очков. Алексей занял 1 место; Даниил

2 место; Виктор 3 место; Семен 4 место. Алексей одержал столько же побед, сколько и Семен. Сколько очков набрал каждый из ребят?

Решение. В каждом раунде два участника в сумме получают 1 очко. Всего было 12 раундов, поэтому в сумме у всех участников 12 очков. Итоговое количество очков у каждого участника – либо целое число, либо целое, увеличенное на 0,5. Если бы Семен набрал хотя бы 2,5 очка, то Виктор хотя бы 3 очка, Даниил хотя бы 3,5 очка, Алексей хотя бы 4 очка, то в сумме они бы набрали хотя бы 13 очков, противоречие. Значит, Семен набрал не более 2 очков. Следовательно, Семен и Алексей одержали не более 2 побед.

Всего Алексей сыграл 6 раундов, и тогда он набрал не более $2\cdot1+4\cdot0{,}5=4$ очков. Если бы Алексей набрал не более 3,5 очков, то Даниил не более 3, Виктор не более 2,5, Семен не более 2. Тогда в сумме они набрали не более 11 очков, противоречие. Значит, Алексей набрал ровно 4 очка, причем, это возможно лишь в случае, когда он 2 раза победил и 4 раза сыграл вничью. Тогда Семен также 2 раза победил, и, следовательно, набрал 2 очка. Даниил и Виктор суммарно набрали оставшиеся $12–4–2=6$ очков. Причем, Виктор набрал хотя бы 2,5 очка, а Даниил не более 3,5 очков. Поскольку они набрали разное число очков и Виктор меньше Даниила, то Виктор набрал 2,5 очка, а Даниил 3,5 очка.

Можно привести пример, как могла произойти описанная ситуация. Алексей дважды выиграл у Семена, дважды сыграл вничью с Виктором и с Даниилом. Семен дважды выиграл у Виктора и дважды проиграл Даниилу. Даниил один раз проиграл Виктору, а другой раз сыграл с ним вничью.

Ответ: Алексей набрал 4 очка, Даниил 3,5 очка,
Виктор 2,5 очка, Семен 2 очка.

6. Из одиннадцати мешков с монетами только десять содержат настоящие монеты (один – только фальшивые). Известно, что в каждом мешке находится более ста монет и все настоящие монеты имеют одинаковую массу, большую массы фальшивых монет, которые также

равновесны. Имеются весы с чашами и стрелкой, определяющие какой груз является более тяжёлым и на сколько именно. За какое наименьшее число взвешиваний можно определить в каком мешке фальшивые монеты?

Решение. *Первое взвешивание:* на одну чашу весов выкладываются по одной монете из произвольных 10 мешков, а на другую 10 монет из оставшегося 11го мешка.

Второе взвешивание: на первую чашу выкладываются монеты по следующей схеме: 1 монета из первого мешка, 2 – из второго, 3 – из третьего, …, 10 – из десятого (мешки пронумерованы после первого взвешивания). На вторую чашу выкладываются 55 монет из одиннадцатого мешка. Сравнивая разности масс при первом и втором взвешиваниях, приходим к однозначному выводу о мешке с фальшивыми монетами.

Ответ: 2.