



**Региональная Олимпиада ВГУ по математике 10-11 классы
(заключительный этап)**

Вариант № 1 решения

Задание 1. На клетчатой бумаге отмечено произвольным образом 2000 клеток. Докажите, что среди них можно выбрать не менее 500 клеток, попарно не соприкасающихся друг с другом (соприкасающимися считаются клетки, имеющие хотя бы одну общую вершину).

Решение. Рассмотрим строки, расположенные через одну друг над другом. Клетки каждой из этих строк окрасим через одну красным и желтым. В оставшихся строках окрасим клетки через одну синим и зеленым. Таким образом, каждая клетка получила свой цвет и никакие две клетки одного цвета не соприкасаются. Остается заметить, что, так как отмечено 2000 клеток, то клеток хотя бы одного из цветов, не меньше чем $2000:4=500$.

Задание 2. Найдите площадь треугольника ABC , если известно, что $\angle ABC = \pi/12$, $BC = 5$, $2AC > AB$, медиана CD образует со стороной AC треугольника угол величиной $5\pi/12$.

Решение. Обозначим величину угла $\angle BAC$ буквой α

Сумма углов треугольника равна π , поэтому $\angle DCB = \pi - \frac{\pi}{12} - \frac{5\pi}{12} - \alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

Высоты треугольников ADC и BDC , проведенные из вершины C , совпадают. Поэтому имеем равенство

$$AC \sin \alpha = BC \sin \frac{\pi}{12}. \quad (1)$$

Медиана CD делит площадь треугольника ABC пополам, поэтому высоты треугольников ADC и BDC , проведенные на их общее основание CD равны. Приравнявая их длины, получаем равенство

$$BC \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = AC \sin \frac{5\pi}{12}. \quad (2)$$

Перемножим почленно равенства (1) и (2), сокращая затем получившееся равенство на $AC \cdot BC$, находим

$$\sin \alpha \cos \alpha = \sin \frac{\pi}{12} \cdot \sin \frac{5\pi}{12} = \sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{12}$$

или

$$\sin 2\alpha = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

По условию выполняется неравенство $AC > AD$, значит

$$\angle ADC > \angle ACD$$

или

$$\frac{7\pi}{12} - \alpha > \frac{5\pi}{12}.$$

Итак, $\alpha < \frac{\pi}{6}$ так что

$$2\alpha = \frac{\pi}{6} \quad \text{и} \quad \alpha = \frac{\pi}{12}.$$

Таким образом, углы треугольника ABC , прилежащие к стороне AB , равны значению

$$\frac{\pi}{12}.$$

Следовательно, этот треугольник равнобедренный, т.е. $AC=BC=5$ и

$$\angle ACB = \frac{5\pi}{6}.$$

Искомая площадь треугольника равна

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \sin \frac{5\pi}{6} = \frac{25}{4}.$$

Заметим, что равенство (1) можно получить также с помощью теоремы синусов, примененной к треугольнику ABC , а (2) следует из равенства площадей треугольников ADC и DBC .

Задание 3. Пусть α, β, γ – внутренние углы треугольника. Доказать справедливость неравенства $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma > 2$.

Решение. Так как

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} + \frac{1 - \cos 2\beta}{2} + \frac{1 - \cos 2\gamma}{2} > 2;$$

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma < -1;$$

$$\gamma = \pi - (\alpha + \beta); \quad \cos 2\gamma = \cos(2\alpha + 2\beta).$$

Тогда

$$2 \cos(\alpha - \beta) \cos(\alpha + \beta) + 1 + \cos(2(\alpha + \beta)) < 0;$$

$$2 \cos(\alpha - \beta) \cos(\alpha + \beta) + 2 \cos^2(\alpha + \beta) < 0;$$

$$2 \cos(\alpha + \beta) (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)) < 0;$$

$$-4 \cos \gamma \cos \alpha \cos \beta < 0; \quad \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma > 0.$$

Это верно для любого остроугольного треугольника.

Задание 4. Найти все пары чисел $(x; y)$, удовлетворяющие соотношению $\sqrt{2-|y|}(5\sin^2 x - 6\sin x \cos x - 9\cos^2 x + 3\sqrt[3]{33}) = (\arcsin x)^2 + (\arccos x)^2 - 1,25\pi^2$.

Решение. Так как

$$\arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]; \quad \arccos x \in [0; \pi]$$

Тогда

$$(\arcsin x)^2 + (\arccos x)^2 - \frac{5\pi^2}{4} \leq 0.$$

Причем равенство достигается только при

$$\begin{cases} \arcsin x = -\frac{\pi}{2}; x = -1. \\ \arccos x = \pi \end{cases}$$

Далее

$$\begin{aligned} 5\sin^2 x - 6\sin x \cos x - 9\cos^2 x + 3\sqrt[3]{33} &= \frac{5}{2}(1 - \cos 2x) - 3\sin 2x - \frac{9}{2}(1 + \cos 2x) + 3\sqrt[3]{33} = \\ &= -7\cos 2x - 3\sin 2x - 2 + 3\sqrt[3]{33} = -\sqrt{58}\cos(2x + \varphi) - 2 + 3\sqrt[3]{33} > 3\sqrt[3]{33} - 2 - \sqrt{58}. \end{aligned}$$

Докажем, что

$$\sqrt{58} + 2 < 3\sqrt[3]{33}. \text{ Возведем в третью степень обе части неравенства}$$

$$58\sqrt{58} + 6\sqrt{58} + 12\sqrt{58} + 8 < 891; \quad 14\sqrt{58} < 107; \quad 196 \cdot 58 < 107^2; \quad 11368 < 11449.$$

Последнее неравенство верно, следовательно

$$5\sin^2 x - 6\sin x \cos x - 9\cos^2 x + 3\sqrt[3]{33} > 0.$$

С учетом, что $\sqrt{2-|y|} \geq 0$ и $(\arcsin x)^2 + (\arccos x)^2 - \frac{5\pi^2}{4} \leq 0$,

получим:

$$\sqrt{2-|y|}(5\sin^2 x - 6\sin x \cos x - 9\cos^2 x + 3\sqrt[3]{33}) = (\arcsin x)^2 + (\arccos x)^2 - \frac{5\pi^2}{4} \Rightarrow |y| = 2.$$

Ответ: $(-1; -2); (-1; 2)$.

Задание 5. Найдите все пары $(x; y)$ натуральных чисел, удовлетворяющие уравнению $2x^2 - xy - y^2 + 8x + 7y = 21$.

Решение. Представим в уравнение в виде $2x^2 - x(y - 8) - (y^2 - 7y + 10) = 11$

и рассмотрим его как квадратное по x .

$$D = (y - 8)^2 + 8y^2 - 56y + 80 = 9y^2 - 72y + 144 = (3y - 12)^2.$$

Получим

$$\begin{cases} x = \frac{-y + 2}{2} \\ x = y - 5 \end{cases}.$$

Приходим к уравнению:

$$(2x + y - 2)(x - y + 5) = 11.$$

Возможны два случая:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x + y - 2 = 11 \\ x - y + 5 = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 7 \end{cases}, \quad \text{б) } \begin{cases} 2x + y - 2 = -11 \\ x - y + 5 = -1 \end{cases}; \quad x = -5 \notin \mathbb{N}.$$

Ответ: (3;7).