**Региональная Олимпиада ВГУ по математике 8-9 классы**
**(заключительный этап)**
**Решения задач**

1. Докажите, что не существует целых чисел $x, y$, удовлетворяющих условию $3y - x^2 = 1$

Решение. Воспользуемся методом «от противного». Пусть существуют целые числа, удовлетворяющие соотношению $3y - x^2 = 1$, следовательно $3y = x^2 + 1$. Правая часть должна делиться на 3, поскольку левая делится на 3. Представим $x$ в виде $x = 3z + k$, где $k$ - остаток от деления числа $x$ на 3; т.е. $k$ равно одному из чисел: 0, 1, или 2. Тогда $x^2 + 1 = (3z + k)^2 + 1 = 3(3z^2 + 2z) + k^2 + 1$. Мы видим, что $k^2 + 1$ должно разделиться на 3. Но при $k = 0,1,2$ число $k^2 + 1$ не делится на 3. Следовательно, $x^2 + 1$ не делится на 3 вопреки сделанному в начале выводу о делимости этого числа на 3. Полученное противоречие доказывает утверждение задачи.

2. Сумма углов $\alpha$ и $\beta$ равна $90^o$. Чему равно максимальное значение произведения $sin\alpha \cdot sin\beta$?

Решение. Рассмотрим прямоугольный треугольник с углами $\alpha$ и $\beta$ и гипотенузой единичной длины. Тогда $sin\alpha \cdot sin\beta = x \cdot y$, где $x, y$ - длины катетов этого треугольника. В силу теоремы Пифагора $x^2 + y^2 = 1$. Таким образом, задача сводится к нахождению максимального значения произведения $x \cdot y$ при условии $x^2 + y^2 = 1$. Из очевидного неравенства $2xy \leq x^2 + y^2 = 1$, которое оказывается равенством лишь при $x = y$. Следовательно максимальное значение произведения $x \cdot y$, а с ним и максимальное значение $sin\alpha \cdot sin\beta$ равно 1/2.

3. Имеется дощечка $1 \times 2023$, составленная из клеточек $1 \times 1$, занумерованных числами от 1 до 2023. На трех первых клетках стоят шашки. Разрешается передвинуть любую шашку, стоящую в клетке номер $k$ в любую клетку с номером $n > k$, если там не стоит какая-то шашка. Петя и Вася совершают такие передвижения шашек по очереди; начинает Петя. Проигравшим считается тот, кому некуда ходить (клетки 2021, 2022, 2023 заняты шашками). Кто выигрывает?

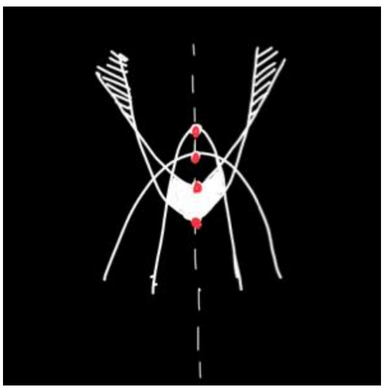
Решение. Петя выигрывает. Первым ходом он должен любую фишку поставит в клетку с номером 2023 и, эта фишка больше не может использоваться. А далее «преследовать» Васю по следующему правилу: если Вася ставит шашку в клетку с номером $n$, то Петя ставит другую шашку в клетку $n - 1$. Очевидно, последний ход при такой стратегии сделает Петя.

4. Докажите, что среди подряд идущих 3n натуральных чисел доля простых чисел не превосходит трети, если $n \geq 12$.

Решение. Разобьём натуральный ряд на тройки (1,2,3), (4,5,6), (7,8,9), … . В каждой тройке, начиная со второй, имеется два составных числа (либо такая тройка заканчивается чётным числом, делящимся на 6 - тогда в ней два чётных числа; либо такая тройка заканчивается нечётным числом, делящимся на 3 - тогда второе число тройки делится на два, т.е. снова имеется два составных числа). Таким образом, в каждой тройке, начиная со второй, не более одного простого числа. Теперь заметим, что встречаются тройки, целиком состоящие из составных чисел. Например, таковы (25,26,27) и (34, 35, 36). Если к этим тройкам добавить первую - (1,2,3), то среди чисел этих троек простые числа составляют менее трети. Таким образом, доля простых чисел среди первых $3n$ натуральных чисел не превосходит трети при $n \geq 12$.

5. Три круга, центрами которых являются различные вершины треугольника ABC, накрывают этот треугольник. Доказать, что найдётся сторона, которая накрыта двумя кругами с центрами в концевых вершинах этой стороны.

Решение. Обозначим через $K_A$ круг с центром в вершине $A$, а через $R_A$ - его радиус; аналогичный смысл имеют обозначения $K_B$, $R_B$ и $K_C$, $R_C$. Предположим, что ни одна сторона треугольника не накрывается кругами с центрами в концевых вершинах этой стороны. Рассмотрим, например, сторону $AB$. На этой стороне имеется отрезок $A_1B_1$, внутренность которого не накрывается кругами $K_A$ и $K_B$, такой что $A_1A = R_A$, $B_1B = R_B$. По условию весь треугольник накрыт тремя кругами, но тогда отрезок $A_1B_1$ должен быть накрыт кругом $K_C$, откуда следует, что $R_C \geq CA_1$. В силу неравенства треугольника имеем $CA_1 + A_1A = CA_1 + R_A \geq AC$. Далее, поскольку сторона $AC$ не покрывается кругами $K_A$, $K_C$, то $AC > R_A + R_B$, что, с учётом предыдущих неравенств приводит к (напомним, что $A_1A = R_A$) $CA_1 + R_A \geq AC > R_A + R_C$, откуда получаем неравенство $CA_1 > R_C$, противоречащее ранее установленному $R_C \geq CA_1$.



6. На какое максимальное число частей $n$ парабол вида $y = ax^2 + b$ могут разрезать плоскость?

Решение. Разбиение плоскости будет симметричным (см. рис), поскольку графики парабол симметричны относительно оси $Oy$. Значит, области, на которые параболы разбивают плоскость, расположены симметрично относительно оси $Oy$ (показана пунктиром). Эти области делятся на два класса: те которые пересекают ось $Oy$ будем относить к первому, а остальные - ко второму. Общее число областей равно сумме областей первого класса, сложенной с удвоенной суммой областей второго класса, расположенных справа от оси $Oy$. Число областей первого класса не может превысить $n + 1$ ( такое количество получается только при попарном несовпадении вершин парабол). Для оценки числа областей второго класса заметим, что справа от оси параболы не могут (если не совпадают) пересечься более одного раза. Теперь заметим, что если уже нарисованы $k$ парабол (будем их называть предыдущими), то следующую параболу можно выбрать так, что она пересечёт их все по одному разу; достаточно выбрать вершину параболы ниже всех предыдущих вершин (за счёт выбора в качестве $b$ достаточно большого по модулю отрицательного числа) и взять достаточно большое $a$ с тем, чтобы парабола достаточно сильно «прижалась» к оси. При этом парабола разрежет самоё большее $k + 1$ областей, образовавшихся от разбиение плоскости предыдущими параболами; добавится одна область первого класса и $k$ областей второго класса, если считать только те, что находятся справа от оси. В итого общее число областей возрастёт на величину $2k + 1$. Таким образом, если через $N(k)$ обозначить максимальное число областей, получающихся от разбиения плоскости $k$ параболами, то $N(k + 1) - N(k) = 2k + 1$. Из этой формулы последовательно получаем $N(n) = N(n - 1) + 2n - 1 = N(n - 2) + (2n - 3) + (2n - 1) = \cdots = N(0) + (2n - 1) + (2n - 3) + \cdots + 1$. Последняя сумма (без $N(0)$, которое равное 1, это - арифметическая прогрессия), а потому легко преобразуется к $N(n) = n^2 + 1$. Это и есть искомое максимальное число частей.