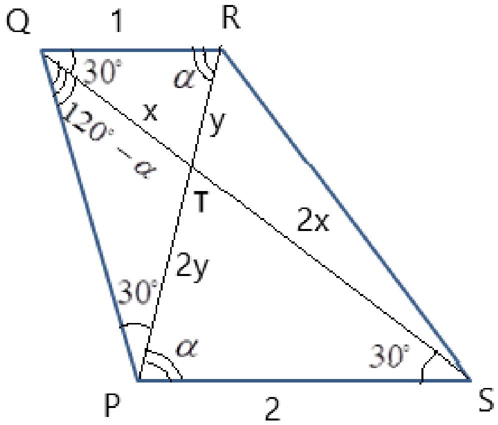
Региональная Олимпиада ВГУ по математике 10-11 классы
(заключительный этап)

Вариант № 2 с ответами

Задание 1. В ряд выписано 100 различных натуральных чисел. Доказать, что если ни одно из них не делится на 100, то найдутся 2 числа, разность которых делится на 100.

Решение. У чисел, которые не делятся на 100, 99 различных остатков от деления на 100: от 1 до 99. Так как чисел 100, то у двух из них одинаковые остатки. Именно их разность делится на 100.

Задание 2. Длина основания PS трапеции $PQRS$ равна 2. Её диагонали PR и QS пересекаются в точке T, причем $TS = 2QT$. Кроме того, $\angle PSQ = \angle QPR = 30^\circ$. Найдите длины боковых сторон PQ и RS трапеции, если известно, что они различны.



Решение. Треугольник QRT подобен треугольнику PTS. $k=1/2$, следовательно, QR=1. По теореме синусов в треугольнике QTR получаем:

$$\frac{x}{\sin\alpha} = 2y \qquad (*)$$

По теореме синусов в треугольнике QTP получаем:

$$\frac{2y}{\sin\left(120^\circ - \alpha\right)} = 2x$$

Отсюда получим:

$$2y = 2x\sin\left(120^\circ - \alpha\right) \Rightarrow \frac{x}{\sin\alpha} = 2x\sin\left(120^\circ - \alpha\right) \Rightarrow 1 = 2\sin\alpha\sin\left(120^\circ - \alpha\right) \Rightarrow$$

$$1 = \cos\left(120^\circ - 2\alpha\right) - \cos 120^\circ \Rightarrow \cos\left(120^\circ - 2\alpha\right) = 1/2.$$

Рассмотрим два возможных варианта:

$$\left[\begin{array}{l} 120^\circ - 2\alpha = 60^\circ \\ 120^\circ - 2\alpha = -60^\circ \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = 30^\circ \\ \alpha = 90^\circ \end{array}\right.$$

В случае $\alpha = 30^\circ$ трапеция равнобедренная, что противоречит условию. Значит, $\alpha = 90^\circ$.

Из (*) следует:

$x = 2y$.

Треугольник QTR прямоугольный, следовательно:

$$x\cos 30^\circ = 1; \quad x = \frac{2}{\sqrt{3}}; \quad y = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

В прямоугольном треугольнике QRP:

$$|QR| = 1; \quad |RP| = 3y = 3\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}; \quad |QP| = \sqrt{1+3} = 2$$

Тогда треугольник *RPS* – прямоугольный, угол *RPS=90°* ,

$$|RP| = 3y = \sqrt{3}; |PS| = 2;$$

следовательно,

$$|RS| = |RP|^2 + |PS|^2 = \sqrt{4+3} = \sqrt{7}.$$

Ответ: 2; √7.

Задание 3. Пусть $\alpha, \beta, \gamma -$ внутренние углы треугольника. Доказать справедливость неравенства $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma \geq\ 0,75$.

Решение. Так как

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} + \frac{1+\cos 2\beta}{2} + \frac{1+\cos 2\gamma}{2} \geq \frac{3}{4};$$

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma \geq -\frac{3}{2};$$

$$\alpha+\beta+\gamma = \pi; \quad \cos 2\gamma = \cos(2\alpha+2\beta).$$

Тогда

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta) \geq -\frac{3}{2};$$

$$2\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta) + 2\cos^2(\alpha+\beta) - 1 \geq -\frac{3}{2};$$

$$2\left(\cos^2(\alpha+\beta) + 2\cos(\alpha+\beta)\frac{\cos(\alpha-\beta)}{2} + \frac{\cos^2(\alpha-\beta)}{4}\right) + \frac{1}{2} - \frac{\cos^2(\alpha-\beta)}{2} \geq 0;$$

$$2\left(\cos(\alpha+\beta) + \frac{\cos(\alpha-\beta)}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sin^2(\alpha+\beta) \geq 0.$$

Очевидно, верное неравенство.

Задание 4. Найти все пары чисел $(x; y)$, удовлетворяющие соотношению $\sqrt{3-|y|}\left(-2\sin^2 y - 10\sin y\cos y + 6\cos^2 y + 2\sqrt[3]{11}\right) =$
$= 2(\arcsin x)^2 + 2(\arccos x)^2 - 2,5\pi^2$.

Решение. Так как

$$\arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]; \quad \arccos x \in [0; \pi]$$

Для оценки правой части отметим, что

$$\left(\arcsin x\right)^2+\left(\arccos x\right)^2-\frac{5\pi}{4}\le 0.$$

И равенство достигается только при

$$\begin{cases}\arcsin x=-\dfrac{\pi}{2}\\ \arccos x=\pi\end{cases};\ x=-1.$$

Далее

$$-2\sin^2 y-10\sin y\cos y+6\cos^2 y+2\sqrt[3]{11}=-1+\cos 2y-5\sin 2y+3+\cos 2y+2\sqrt[3]{11}=$$
$$=-5\sin 2y+4\cos 2y+2+2\sqrt[3]{11}=\sqrt{41}\cos(2y+\varphi)+2+2\sqrt[3]{11}\ge 2\sqrt[3]{11}+2-\sqrt{41}.$$

Докажем, что

$2\sqrt[3]{11}>\sqrt{41}-2$. Возведем в третью степень обе части неравенства

$$88>12\sqrt{41}-6\cdot 41+41\sqrt{41}-8;\quad 342>53\sqrt{41};\quad 116964>115169.$$

Последнее неравенство верно, следовательно

$$-2\sin^2 y-10\sin y\cos y+6\cos^2 y+2\sqrt[3]{11}>0.$$

Отсюда получим:

$$\begin{cases}3-|y|=0\\ x=-1\end{cases};\begin{cases}|y|=3\\ x=-1\end{cases}.$$

Ответ: (-1;-3); (-1;3).

Задание 5. Найдите все пары $(p;q)$ натуральных чисел, удовлетворяющие уравнению $2p^2-q^2-pq+13p+8q=18$.

Решение. Замены $p=x-1; q=y+1$ приводят уравнение к виду $2x^2-xy-y^2+8x+7y=21$

Представим теперь это уравнение в виде: $2x^2-x\left(y-8\right)-\left(y^2-7y+10\right)=11$

и рассматриваем его как квадратное по *x*.

$$D=\left(y-8\right)^2+8y^2-56y+80=9y^2-42y+144=\left(3y-12\right)^2.$$

Получим

$$\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-y+2}{2}\\ x=y-5\end{array}\right..$$

Приходим к уравнению:

$$\left(2x+y-2\right)\left(x-y-2\right)=11.$$

Возможны два случая:

а) $\begin{cases}2x+y-2=11\\ x-y+5=1\end{cases}$; $\begin{cases}x=3\\ y=7\end{cases}$, б) $\begin{cases}2x+y-2=-11\\ x-y+5=-1\end{cases}$; $x=-5\notin \mathrm{N}$.

и рассмотрим его как квадратное по *x*.

$$D=\left(y-8\right)^2+8y^2-56y+80=9y^2-42y+144=\left(3y-12\right)^2.$$

Получим

$$\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-y+2}{2}\\ x=y-5\end{array}\right..$$

Приходим к уравнению:

$$\left(2x+y-2\right)\left(x-y-2\right)=11.$$

Возможны два случая:

а) $\begin{cases}2x+y-2=11\\ x-y+5=1\end{cases}$; $\begin{cases}x=3\\ y=7\end{cases}$, б) $\begin{cases}2x+y-2=-11\\ x-y+5=-1\end{cases}$; $x=-5\notin \mathrm{N}$.

Получили

$\begin{cases}x=3\\ y=7\end{cases}$, т.е. $p=3-1=2;\quad q=7+1=8.$

Ответ: (2;8).