Региональная Олимпиада ВГУ по математике 10-11 классы
(заключительный этап)

Вариант № 1, решения

Задание 1. На клетчатой бумаге отмечено произвольным образом 2000 клеток. Докажите, что среди них можно выбрать не менее 500 клеток, попарно не соприкасающихся друг с другом (соприкасающимися считаются клетки, имеющие хотя бы одну общую вершину). (**9 баллов**)

Решение. Рассмотрим строки, расположенные через одну друг над другом. Клетки каждой из этих строк окрасим через одну красным и желтым. В оставшихся строках окрасим клетки через одну синим и зеленым. Таким образом, каждая клетка получила свой цвет и никакие две клетки одного цвета не соприкасаются. Остается заметить, что, так как отмечено 2000 клеток, то клеток хотя бы одного из цветов, не меньше чем 2000:4=500.

Задание 2. Найдите площадь треугольника ABC, если известно, что $\angle ABC = \pi/12,\ BC = 5,\ 2AC > AB$, медиана CD образует со стороной AC треугольника угол величиной $5\pi/12$. (**13 баллов**)

Решение. Обозначим величину угла $\angle BAC$ буквой α

Сумма углов треугольника равна π, поэтому $\angle DCB = \pi - \frac{\pi}{12} - \frac{5\pi}{12} - \alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha.$

Высоты треугольников *ADC* и *BDC*, проведенные из вершины *C*, совпадают. Поэтому имеем равенство

$$AC \sin\alpha = BC \sin\frac{\pi}{12}. \qquad (1)$$

Медиана CD делит площадь треугольника ABC пополам, поэтому высоты треугольников ADC и BDC, проведенные на их общее основание CD равны. Приравнивая их длины, получаем равенство

$$BC \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = AC \sin\frac{5\pi}{12}. \qquad (2)$$

Перемножим почленно равенства (1) и (2), сокращая затем получившееся равенство на $AC \cdot BC$, находим

$$\sin\alpha\cos\alpha = \sin\frac{\pi}{12}\cdot\sin\frac{5\pi}{12} = \sin\frac{\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{12}$$

или

$$\sin 2\alpha = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

По условию выполняется неравенство $AC>AD$, значит

$$\angle ADC > \angle ACD$$

или

$$\frac{7\pi}{12}-\alpha>\frac{5\pi}{12}.$$

Итак, $\alpha<\dfrac{\pi}{6}$ так что

$$2\alpha=\frac{\pi}{6}\quad \text{и} \quad \alpha=\frac{\pi}{12}.$$

Таким образом, углы треугольника *ABC*, прилежащие к стороне *AB*, равны значению

$\dfrac{\pi}{12}$.

Следовательно, этот треугольник равнобедренный, т.е. $AC=BC=5$ и

$$\angle ACB=\frac{5\pi}{6}.$$

Искомая площадь треугольника равна

$$S=\frac{1}{2}AC\cdot BC\cdot\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{25}{4}.$$

Заметим, что равенство (1) можно получить также с помощью теоремы синусов, примененной к треугольнику *ABC*, а (2) следует из равенства площадей треугольников *ADC* и *DBC*.

<u>Задание 3</u>. Пусть $\alpha,\beta,\gamma-$ внутренние углы треугольника. Доказать справедливость неравенства $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma>2$. (**22 балла**)

<u>Решение.</u> Так как

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}+\frac{1-\cos 2\beta}{2}+\frac{1-\cos 2\gamma}{2}>2;$$
$$\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma<-1;$$
$$\gamma=\pi-(\alpha+\beta);\quad \cos 2\gamma=\cos(2\alpha+2\beta).$$

Тогда

$$2\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)+1+\cos\left(2(\alpha+\beta)\right)<0;$$
$$2\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)+2\cos^2(\alpha+\beta)<0;$$
$$2\cos(\alpha+\beta)\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right)<0;$$
$$-4\cos\gamma\cos\alpha\cos\beta<0;\quad \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma>0.$$

Это верно для любого остроугольного треугольника.

Задание 4. Найти все пары чисел $(x;\,y)$, удовлетворяющие соотношению $\sqrt{2-|y|}\left(5\sin^2 x-6\sin x\cos x-9\cos^2 x+3\sqrt[3]{33}\right)=$
$=(\arcsin x)^2+(\arccos x)^2-1,25\pi^2$. **(30 баллов)**

Решение. Так как

$$\arcsin x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right];\quad \arccos x\in[0;\pi]$$

Тогда

$$(\arcsin x)^2+(\arccos x)^2-\frac{5\pi^2}{4}\le 0.$$

Причем равенство достигается только при

$$\begin{cases}\arcsin x=-\dfrac{\pi}{2}\\ \arccos x=\pi\end{cases};\ x=-1.$$

Далее

$$5\sin^2 x-6\sin x\cos x-9\cos^2 x+3\sqrt[3]{33}=\frac{5}{2}(1-\cos 2x)-3\sin 2x-\frac{9}{2}(1+\cos 2x)+3\sqrt[3]{33}=$$
$$=-7\cos 2x-3\sin 2x-2+3\sqrt[3]{33}=-\sqrt{58}\cos(2x+\varphi)-2+3\sqrt[3]{33}>3\sqrt[3]{33}-2-\sqrt{58}.$$

Докажем, что

$\sqrt{58}+2<3\sqrt[3]{33}$. Возведем в третью степень обе части неравенства

$$58\sqrt{58}+6\sqrt{58}+12\sqrt{58}+8<891;\quad 14\sqrt{58}<107;\quad 196\cdot 58<107^2;\quad 11368<11449.$$

Последнее неравенство верно, следовательно

$$5\sin^2 x-6\sin x\cos x-9\cos^2 x+3\sqrt[3]{33}>0.$$

С учетом, что $\sqrt{2-|y|}\ge 0$ и $(\arcsin x)^2+(\arccos x)^2-\dfrac{5\pi^2}{4}\le 0$,

получим:

$$\sqrt{2-|y|}\left(5\sin^2 x-6\sin x\cos x-9\cos^2 x+3\sqrt[3]{33}\right)=(\arcsin x)^2+(\arccos x)^2-\frac{5\pi^2}{4}\Rightarrow |y|=2.$$

Ответ: (-1;-2); (-1;2).

Задание 5. Найдите все пары $(x;\,y)$ натуральных чисел, удовлетворяющие уравнению $2x^2-xy-y^2+8x+7y=21$. **(26 баллов)**

Решение. Представим в уравнение в виде $2x^2 - x(y-8) - (y^2 - 7y + 10) = 11$

и рассмотрим его как квадратное по x.

$D = (y-8)^2 + 8y^2 - 56y + 80 = 9y^2 - 72y + 144 = (3y-12)^2$.

Получим

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-y+2}{2} \\ x = y-5 \end{array}\right..$$

Приходим к уравнению:

$(2x + y - 2)(x - y + 5) = 11.$

Возможны два случая:

а) $\begin{cases} 2x + y - 2 = 11 \\ x - y + 5 = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 3 \\ y = 7 \end{cases}$, б) $\begin{cases} 2x + y - 2 = -11 \\ x - y + 5 = -1 \end{cases}$; $x = -5 \notin \mathrm{N}$.

Ответ: (3;7).