



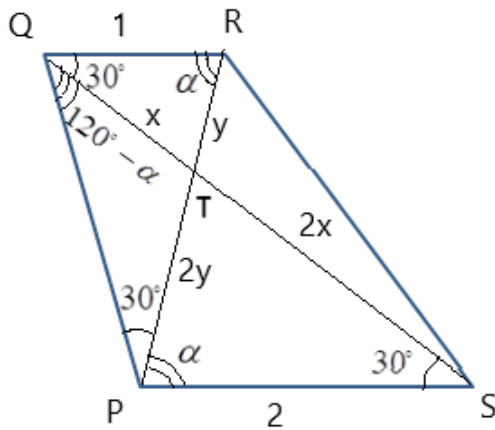
Региональная Олимпиада ВГУ по математике 10-11 классы
(заключительный этап)

Вариант № 2 с ответами

Задание 1. В ряд выписано 100 различных натуральных чисел. Доказать, что если ни одно из них не делится на 100, то найдутся 2 числа, разность которых делится на 100. (9 баллов)

Решение. У чисел, которые не делятся на 100, 99 различных остатков от деления на 100: от 1 до 99. Так как чисел 100, то у двух из них одинаковые остатки. Именно их разность делится на 100.

Задание 2. Длина основания PS трапеции $PQRS$ равна 2. Её диагонали PR и QS пересекаются в точке T , причем $TS = 2QT$. Кроме того, $\angle PSQ = \angle QPR = 30^\circ$. Найдите длины боковых сторон PQ и RS трапеции, если известно, что они различны. (13 баллов)



Решение. Треугольник QRT подобен треугольнику PTS . $k=1/2$, следовательно, $QR=1$. По теореме синусов в треугольнике QTR получаем:

$$\frac{x}{\sin \alpha} = 2y \quad (*)$$

По теореме синусов в треугольнике QTP получаем:

$$\frac{2y}{\sin(120^\circ - \alpha)} = 2x$$

Отсюда получим:

$$2y = 2x \sin(120^\circ - \alpha) \Rightarrow \frac{x}{\sin \alpha} = 2x \sin(120^\circ - \alpha) \Rightarrow 1 = 2 \sin \alpha \sin(120^\circ - \alpha) \Rightarrow$$

$$1 = \cos(120^\circ - 2\alpha) - \cos 120^\circ \Rightarrow \cos(120^\circ - 2\alpha) = 1/2.$$

Рассмотрим два возможных варианта:

$$\begin{cases} 120^\circ - 2\alpha = 60^\circ \\ 120^\circ - 2\alpha = -60^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 30^\circ \\ \alpha = 90^\circ \end{cases}$$

В случае $\alpha = 30^\circ$ трапеция равнобедренная, что противоречит условию. Значит, $\alpha = 90^\circ$.

Из (*) следует:

$$x = 2y.$$

Треугольник QTR прямоугольный, следовательно:

$$x \cos 30^\circ = 1; \quad x = \frac{2}{\sqrt{3}}; \quad y = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

В прямоугольном треугольнике QRP :

$$|QR|=1; \quad |RP|=3y=3\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}; \quad |QP|=\sqrt{1+3}=2$$

Тогда треугольник RPS – прямоугольный, угол $RPS=90^\circ$,

$$|RP|=3y=\sqrt{3}; |PS|=2;$$

следовательно,

$$|RS|=\sqrt{|RP|^2+|PS|^2}=\sqrt{4+3}=\sqrt{7}.$$

Ответ: 2; $\sqrt{7}$.

Задание 3. Пусть α, β, γ – внутренние углы треугольника. Доказать справедливость неравенства $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma \geq 0,75$. (22 балла)

Решение. Так как

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} + \frac{1 + \cos 2\beta}{2} + \frac{1 + \cos 2\gamma}{2} \geq \frac{3}{4};$$

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma \geq -\frac{3}{2};$$

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi; \quad \cos 2\gamma = \cos(2\alpha + 2\beta).$$

Тогда

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos(2\alpha + 2\beta) \geq -\frac{3}{2};$$

$$2\cos(\alpha - \beta)\cos(\alpha + \beta) + 2\cos^2(\alpha + \beta) - 1 \geq -\frac{3}{2};$$

$$2\left(\cos^2(\alpha + \beta) + 2\cos(\alpha + \beta)\frac{\cos(\alpha - \beta)}{2} + \frac{\cos^2(\alpha - \beta)}{4}\right) + \frac{1}{2} - \frac{\cos^2(\alpha - \beta)}{2} \geq 0;$$

$$2\left(\cos(\alpha + \beta) + \frac{\cos(\alpha - \beta)}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sin^2(\alpha + \beta) \geq 0.$$

Очевидно, верное неравенство.

Задание 4. Найти все пары чисел $(x; y)$, удовлетворяющие соотношению

$$\sqrt{3-|y|}\left(-2\sin^2 y - 10\sin y \cos y + 6\cos^2 y + 2\sqrt[3]{11}\right) = \\ = 2(\arcsin x)^2 + 2(\arccos x)^2 - 2,5\pi^2. \quad (30 \text{ баллов})$$

Решение. Так как

$$\arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]; \quad \arccos x \in [0; \pi]$$

Для оценки правой части отметим, что

$$(\arcsin x)^2 + (\arccos x)^2 - \frac{5\pi}{4} \leq 0.$$

И равенство достигается только при

$$\begin{cases} \arcsin x = -\frac{\pi}{2}; x = -1. \\ \arccos x = \pi \end{cases}$$

Далее

$$\begin{aligned} -2\sin^2 y - 10\sin y \cos y + 6\cos^2 y + 2\sqrt[3]{11} &= -1 + \cos 2y - 5\sin 2y + 3 + \cos 2y + 2\sqrt[3]{11} = \\ &= -5\sin 2y + 4\cos 2y + 2 + 2\sqrt[3]{11} = \sqrt{41} \cos(2y + \varphi) + 2 + 2\sqrt[3]{11} \geq 2\sqrt[3]{11} + 2 - \sqrt{41}. \end{aligned}$$

Докажем, что

$$2\sqrt[3]{11} > \sqrt{41} - 2. \text{ Возведем в третью степень обе части неравенства}$$

$$88 > 12\sqrt{41} - 6 \cdot 41 + 41\sqrt{41} - 8; \quad 342 > 53\sqrt{41}; \quad 116964 > 115169.$$

Последнее неравенство верно, следовательно

$$-2\sin^2 y - 10\sin y \cos y + 6\cos^2 y + 2\sqrt[3]{11} > 0.$$

Отсюда получим:

$$\begin{cases} 3 - |y| = 0 \\ x = -1 \end{cases}; \begin{cases} |y| = 3 \\ x = -1 \end{cases}.$$

Ответ: (-1;-3); (-1;3).

Задание 5. Найдите все пары $(p; q)$ натуральных чисел, удовлетворяющие уравнению $2p^2 - q^2 - pq + 13p + 8q = 18$. (26 баллов)

Решение. Замены $p = x - 1; q = y + 1$ приводят уравнение к виду $2x^2 - xy - y^2 + 8x + 7y = 21$

Представим теперь это уравнение в виде: $2x^2 - x(y - 8) - (y^2 - 7y + 10) = 11$

и рассматриваем его как квадратное по x .

$$D = (y - 8)^2 + 8y^2 - 56y + 80 = 9y^2 - 42y + 144 = (3y - 12)^2.$$

Получим

$$\begin{cases} x = \frac{-y + 2}{2} \\ x = y - 5 \end{cases}.$$

Приходим к уравнению:

$$(2x + y - 2)(x - y - 2) = 11.$$

Возможны два случая:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x + y - 2 = 11 \\ x - y + 5 = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 7 \end{cases}, \quad \text{б) } \begin{cases} 2x + y - 2 = -11 \\ x - y + 5 = -1 \end{cases}; \quad x = -5 \notin \mathbb{N}.$$

и рассмотрим его как квадратное по x .

$$D = (y - 8)^2 + 8y^2 - 56y + 80 = 9y^2 - 42y + 144 = (3y - 12)^2.$$

Получим

$$\begin{cases} x = \frac{-y + 2}{2} \\ x = y - 5 \end{cases}.$$

Приходим к уравнению:

$$(2x + y - 2)(x - y - 2) = 11.$$

Возможны два случая:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x + y - 2 = 11 \\ x - y + 5 = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 7 \end{cases}, \quad \text{б) } \begin{cases} 2x + y - 2 = -11 \\ x - y + 5 = -1 \end{cases}; \quad x = -5 \notin \mathbb{N}.$$

Получили

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 7 \end{cases}, \quad \text{т.е. } p = 3 - 1 = 2; \quad q = 7 + 1 = 8.$$

Ответ: (2;8).