Воронежский государственный университет

Математический факультет. Олимпиада по математике

Заочный тур. 10 - 11 классы

1. В семье четверо детей. Им 5, 8, 13, 15 лет. Детей зовут Аня, Боря, Вера и Галя. Сколько лет Гале, если одна девочка ходит в детский сад, Аня старше Бори и сумма лет Ани и Веры делится на 3.

Решение. Так как в детский сад ходит девочка, это не Боря. Тогда Боре 8, 13 или 15 лет. Так как Аня старше Бори, то Боре 8 или 13 лет. Так как сумма лет Ани и Веры делится на 3, то это возможно в следующих случаях:

а. Одной 5 лет, другой 13 лет.

б. Одной 8 лет, другой 13 лет.

В обоих случаях одной девочке 13 лет. Значит, Боре 8 лет. Так как Аня старше Бори, то ей 13 лет. Тогда Вере 5 лет, а Гале 15 лет.

Ответ: 15.

2. Решить уравнение $x^2+4x\cdot\cos(xy)+4=0$. В ответе записать наименьшее возможное значение решения x.

Решение. Преобразуем уравнение к виду

$$(x+2\cos(xy))^2+4\sin^2(xy)=0.$$

Последнее уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} x+2\cos(xy)=0, \\ \sin(xy)=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2\cos(xy), \\ xy=\pi k, k\in Z. \end{cases}$$

Рассмотрим два случая.

а. $k=2n+1,\ n\in Z$. Тогда из последней системы получаем

$$x=-2\cos(\pi(2n+1))=2, y=\frac{\pi(2n+1)}{2}.$$

б. $k=2n,\ n\in Z$. Тогда из последней системы получаем

$$x=-2\cos(2\pi n)=-2, y=\frac{2\pi n}{-2}=-\pi n.$$

Ответ: –2.

3. Решить в цифрах уравнение $(x+y)^3=\overline{xyx}$.

(Примечание: $\overline{xyx}$ – число $\overline{xyx}=100x+10y+x$, где x, y – цифры). В ответе записать число $\overline{xyx}$.

Решение. Так как $\overline{xyx}$ – трехзначное число, то $(x+y)^3$ тоже. Значит

$$100 \le (x+y)^3 < 1000.$$

Следовательно, $5 \le x+y \le 9$.

Рассмотрим все возможные варианты.

1 случай. $x+y=5 \Rightarrow (x+y)^3 = \overline{xyx} = 125$ – не может быть.

2 случай. $x+y=6 \Rightarrow (x+y)^3 = \overline{xyx} = 216$ – не может быть.

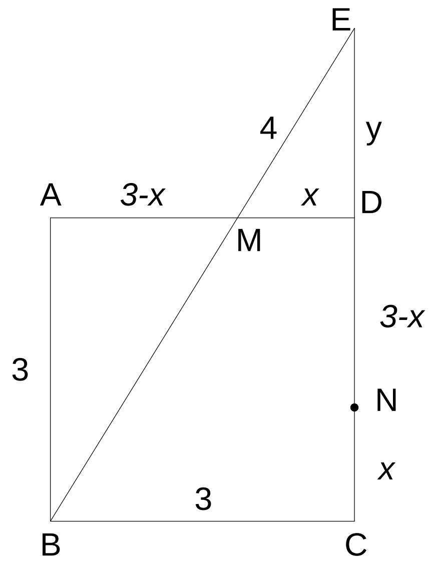
3 случай. $x+y=7 \Rightarrow (x+y)^3 = \overline{xyx} = 343$ – подходит.

4 случай. $x+y=8 \Rightarrow (x+y)^3 = \overline{xyx} = 512$ – не может быть.

5 случай. $x+y=9 \Rightarrow (x+y)^3 = \overline{xyx} = 729$ – не может быть.

Ответ: 343.

4. На сторонах AD и CD квадрата ABCD со стороной 3 взяты соответственно две точки M и N так, что MD+DN=3. Прямые BM и CD пересекаются в точке E. Найти длину отрезка EN, если EM=4.



Решение.

Пусть *ED=y*, *MD=x(x, y>0)*, тогда *NC=x*, *AM=DN=3-x*. Так как $S_{BCE} = S_{EMD} + S_{BMDC}$, то

$$(3+y)3 = xy + (x+3)3, \text{<=>}$$

$$3(x-y) + xy = 0. \qquad (1)$$

Из прямоугольного треугольника *MDE*

$$x^2 + y^2 = 16. \qquad (2)$$

Сделаем замену $u = x - y,\ 3v = xy$. Тогда из (1) и (2) получаем, что

$$\begin{cases} 3u + 3v = 0, \\ u^2 + 6v = 16, \end{cases} \text{<=>} \quad \begin{cases} u = -2, \\ v = 2. \end{cases} \quad \text{Тогда} \quad \begin{cases} x - y = -2, \\ xy = 6, \end{cases} \text{<=>} \begin{cases} x = \sqrt{7} - 1, \\ y = \sqrt{7} + 1. \end{cases}$$

Следовательно, $EN = y + 3 - x = \sqrt{7} + 1 + 3 - \sqrt{7} + 1 = 5$.

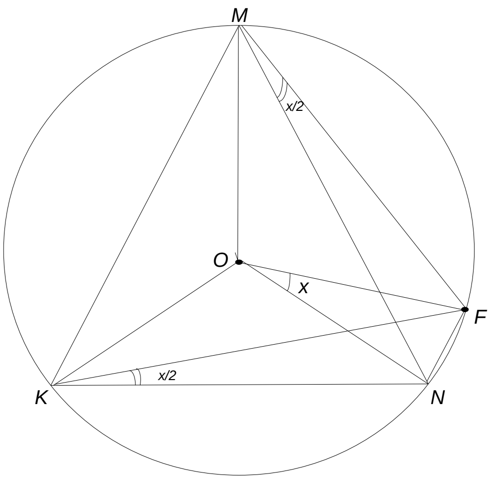
Ответ: 5.

5. Если перемножить некоторые 6 последовательных натуральных нечётных чисел, а затем в получившемся числе заменить одну цифру звёздочкой, получим число 10530*075. Найти стёртую цифру.

Решение. Среди 6 последовательных нечётных натуральных чисел есть два, кратные трём. Следовательно, искомое число делится на 9, а значит и сумма его цифр делится на 9. Эта сумма равна 21+”*”, следовательно ”*”=6.

Ответ: 6.

6. Равносторонний треугольник MNK вписан в окружность радиуса R. На окружности взята точка F. Найдите отношение $\dfrac{FM^4 + FN^4 + FK^4}{R^4}$.



Решение.

Пусть $\angle NOF = x$, тогда $\angle NKF = \angle NMF = x/2$.

Из теоремы синусов получаем

$$FN = 2R\sin(x/2),\ FM = 2R\sin(60 - x/2),$$

$FK = 2R\sin(60 + x/2)$. Тогда

$$\frac{FM^4 + FN^4 + FK^4}{R^4} =$$

$$= 16(\sin^4(x/2) + \sin^4(60 - x/2) + \sin^4(60 + x/2)) =$$

$$= 4((1-\cos x)^2 + (1-\cos(120-x))^2 + (1-\cos(120+x))^2) =$$

$$= 4(3 - 2\cos x - 2\cos(120-x) -$$

$$-2\cos(120+x) + \cos^2 x + \cos^2(120-x) + \cos^2(120+x)) = 4(3 - 2\cos x -$$

$$-2(-\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x) - 2(-\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x) + \frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos(240+2x)}{2} +$$

$$+\frac{1+\cos(240-2x)}{2}) = 4(3 - 2\cos x + \cos x - \sqrt{3}\sin x + \cos x + \sqrt{3}\sin x + \frac{3}{2} + \frac{\cos 2x}{2} +$$

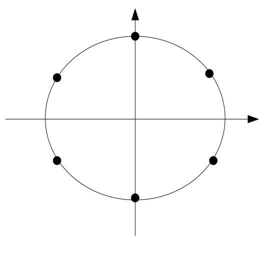
$$+\frac{1}{2}(\cos(240+2x) + \cos(240-2x))) = 4(\frac{9}{2} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{1}{2}2\cos(240)\cos 2x) =$$

$$= 4(\frac{9}{2} + \frac{\cos 2x}{2} - \frac{\cos 2x}{2}) = 18.$$

Ответ: 18.

7. Решить неравенство $\dfrac{\sin^2 x}{|\cos 2x|} \le 2|\sin x| - |\cos 2x|$.

В ответе записать угловую величину (в градусах) дуги единичной окружности, в которой нет решений неравенства.



Решение. ОДЗ: $\cos 2x \ne 0$. Умножив неравенство на $|\cos 2x|$ запишем его в виде

$$|\sin x|^2-2|\sin x||\cos 2x|+|\cos 2x|^2\le 0, \iff (|\sin x|-|\cos 2x|)^2\le 0, \Leftrightarrow |\sin x|=|\cos 2x|,$$

$$\iff \sin^2 x=\cos^2 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x-\cos 2x=0,\\ \sin x+\cos 2x=0,\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}\sin x+2\sin^2 x-1=0,\\ \sin x-2\sin^2 x+1=0,\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=-1,\\ \sin x=0,5,\\ \sin x=1,\\ \sin x=-0,5.\end{array}\right.$$

Решение последней совокупности

$$x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}, k\in \mathrm{Z}.$$

Ответ: 60^0.

8. На доске написано несколько положительных чисел. Сумма пяти наибольших из них составляет 0,29 суммы всех чисел, а сумма пяти наименьших составляет 0,26 от суммы всех чисел. Сколько всего чисел записано на доске?

Решение. Пусть общее количество чисел *k+10*. Из условия следует, что *k>0*. Можно считать, что сумма всех чисел равна *1* (иначе, поделим каждое число на эту сумму). Упорядочим числа по возрастанию

$$a_1\le a_2\le a_3\le a_4\le a_5\le a_6\le\ldots\le a_{5+k}\le a_{6+k}\le a_{7+k}\le a_{8+k}\le a_{9+k}\le a_{10+k}.$$

Тогда

$$0,26=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5\le 5a_5 \Rightarrow a_5\ge\frac{0,26}{5}.$$

Кроме того,

$$0,29=a_{6+k}+a_{7+k}+a_{8+k}+a_{9+k}+a_{10+k}\ge 5a_{6+k} \Rightarrow a_{6+k}\le\frac{0,29}{5}.$$

Пусть $S=a_6+\ldots+a_{5+k}$. Так как $S=1-0,26-0,29=0,45$, то

$$\frac{0,26k}{5}\le ka_5\le ka_6\le 0,45\le ka_{5+k}\le ka_{6+k}\le\frac{0,29k}{5},$$

$$\Downarrow$$

$$7\frac{22}{29}=\frac{45\cdot 5}{29}\le k\le\frac{45\cdot 5}{26}=8\frac{17}{25},$$

$$\Downarrow$$

$$k=8.$$

Ответ: 8.