Воронежский государственный университет

Математический факультет. Олимпиада по математике

Заочный тур. 6 - 7 классы

1. Петя, Витя и Таня собирают грибы. Если к грибам Тани добавить половину грибов Пети, то получится вдвое больше, чем у Вити. Если к грибам Вити добавить половину грибов Тани, будет вдвое больше грибов, чем у Пети. Во сколько раз больше Пети собрала грибов Таня?

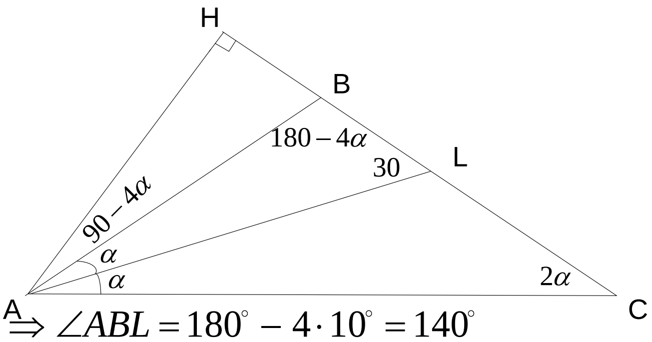
Решение. Пусть Петя собрал x грибов, Витя y грибов, Таня z грибов. Тогда по условию

$$\begin{cases} z+\dfrac{x}{2}=2y, \\ y+\dfrac{z}{2}=2x, \end{cases} \iff \begin{cases} y=2x-\dfrac{z}{2}. \\ z+\dfrac{x}{2}=2(2x-\dfrac{z}{2})=4x-z, \end{cases} \iff 2z=\dfrac{7}{2}x,\ \dfrac{z}{x}=\dfrac{7}{4}=1{,}75.$$

Ответ: 1,75.

2. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC биссектриса AL вдвое длиннее высоты AH, угол B – тупой. Найдите величину угла ABC (в градусах).

Решение.



Так как $AL=2AH$, то $\angle ALH=30^\circ$. Пусть $\angle A=2\alpha$, тогда $\angle C=2\alpha$, $\angle ABC=180^\circ-4\alpha$.

Из треугольника ABL:

$\alpha+30^\circ+180^\circ-4\alpha=180^\circ \Rightarrow \alpha=10^\circ \Rightarrow \angle ABL=180^\circ-4\cdot10^\circ=140^\circ$

.

Ответ: 140^0.

3. Если некоторое число увеличить на 15%, то получим 207. На сколько процентов надо уменьшить исходное число, чтобы получилось 126?

Решение. Пусть число – A, проценты – x. Тогда $A\cdot\dfrac{115}{100}=207$. Следовательно,

$$A=\frac{100\cdot207}{115}=\frac{20\cdot207}{23}=20\cdot9=180.$$

По условию $A\cdot(1-\dfrac{x}{100})=126$. Следовательно,

$$180\cdot(1-\frac{x}{100})=126 \Rightarrow \frac{18x}{10}=180-126=54 \Rightarrow x=\frac{10\cdot54}{18}=30.$$

Ответ: 30.

4. Поезд Воронеж-Москва имеет сплошную нумерацию мест в вагонах, начиная с первого вагона. Количество мест в вагонах совпадает. Места с 1453 по 1484 находятся в одном вагоне, а места 2013 и 2047 – в разных не соседних вагонах. Каково количество мест в одном из вагонов?

Решение. Пусть в вагоне n мест. Так как места 1484 и 1453 в одном вагоне, то

$$1484-1453<n \Rightarrow n>31.$$

Так как места 2013 и 2047 не в соседних вагонах, то

$$2047-2013>n \Rightarrow n<34.$$

Значит, n может быть 32 или 33. Проверим каждое из значений.

Пусть $n=32$. Так как $1453=45\cdot 32+13, 1484=46\cdot 32+12$, то место 1453 в 46-м вагоне, а место 1484 в 47-м вагоне. По условию такого не может быть. Значит $n\neq 32$.

Пусть $n=33$. Так как $1453=44\cdot 33+1, 1484=44\cdot 33+32, 2013=61\cdot 33,$ $2047=62\cdot 33+1,$ то место 1453 в 45-м вагоне, место 1484 в 45-м вагоне, место 2013 в 61-м вагоне (последнее место), а место 2047 в 63-м вагоне. Все условия задачи соблюдены. Значит $n=33$.

Ответ: 33.

5. Сколько имеется несократимых правильных дробей со знаменателем 133?

Решение. Правильные дроби со знаменателем 133 имеют вид $\frac{n}{133}$, где $n=1,2,...,132$. Так как $133=7\cdot 19$, то дробь $\frac{n}{133}$ несократима если n не делится на 7 и 19. Так как среди чисел от 1 до 132 делящихся на 7 всего 18 ($7\cdot 1, 7\cdot 2,...,7\cdot 18$), чисел делящихся на 19 всего 6 ($19\cdot 1, 19\cdot 2,...,19\cdot 6$), то n таких что дробь $\frac{n}{133}$ несократима будет 132-18-6=108.

Ответ: 108.

6. Решить в целых числах уравнение $x^2-y^2=4$. В ответе запишите $|x-y|$.

Решение. Запишем уравнение в виде

$$(x-y)(x+y)=4. \qquad (1)$$

Из (1) следует, что числа x, y одной четности (так как в противном случае $(x-y)(x+y)$ было бы нечетным числом) и $x-y$ это делитель 4. Значит, возможны только следующие варианты

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-y=2,\\ x+y=2,\end{cases}\\ \begin{cases}x-y=-2,\\ x+y=-2,\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2,\\ y=0,\end{cases}\\ \begin{cases}x=-2,\\ y=0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Во всех возможных случаях $|x-y|=|\pm 2-0|=2$.

Ответ: 2.

7. Известно, что периметр прямоугольника равен 8. Какая наибольшая площадь может быть у этого прямоугольники?

Решение. Обозначим стороны прямоугольника a и b. Тогда по условию $2(a+b)=8$. Следовательно,

$$a+b=4. \qquad (1)$$

Пусть $a=2-x$, где $0\le x<2$ (так можно считать так как из двух чисел одно обязательно не превосходит другое). Тогда из (1) $b=2+x$. Следовательно площадь четырёхугольника равна $S=a\cdot b=(2-x)(2+x)=4-x^2\le 4$.

Значит, наибольшая площадь равна 4 и достигается при $x=0$, то есть когда $a=b=2$.

Ответ: 4.

8. Найти четырехзначное число, которое в 83 раза больше суммы своих цифр.

Решение. Пусть N – число, S – сумма его цифр. Так как N четырехзначное число, то $1\le S\le 36$. По условию

$$N=83S. \qquad (1)$$

Из (1) следует, что

$$N-S=82S. \qquad (2)$$

Воспользовавшись признаком делимости на 9 получаем, что $N-S$ делится на 9. Тогда из (2) находим, что S делится на 9. Значит S может равняться только 18, 27 или 36 ($S\ne 9$ так как N четырёхзначное), а N может равняться только $18\cdot 83=1494,\ 27\cdot 83=2241,\ 36\cdot 83=2998$. Равенству (1) удовлетворяет только число 1494.

Ответ: 1494.