Воронежский государственный университет
Математический факультет. Олимпиада по математике
8 - 9 классы. Заочный тур.

1. Углы правильного многоугольника выражаются целыми числами градусов: число этих углов не кратно ни 2, ни 3. Найдите число углов правильного многоугольника.

Решение. Угол правильного n-угольника равен

$$A=\frac{180\cdot(n-2)}{n}=180-\frac{360}{n}=180-\frac{2^2\cdot 3^2\cdot 5}{n}.$$

Так как A целое число, то $\frac{2^2\cdot 3^2\cdot 5}{n}$ – целое число. Следовательно, n – делитель $2^2\cdot 3^2\cdot 5$. С учётом условия получаем, что $n=5$.

Ответ: 5.

2. Сколько существует натуральных n при которых дробь $\frac{n^2-8n+22}{n-4}$ является целым числом?

Решение. Так как $\frac{n^2-8n+22}{n-4}=\frac{(n-4)^2+6}{n-4}=n-4+\frac{6}{n-4}$, то необходимо, чтобы $6 \vdots n-4$. Следовательно, n могут быть решениями только следующей совокупности

$$\left[\begin{array}{l} n-4=1, \\ n-4=-1, \\ n-4=2, \\ n-4=-2, \\ n-4=3, \\ n-4=-3, \\ n-4=6, \\ n-4=-6, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=5, \\ n=3, \\ n=6, \\ n=2, \\ n=7, \\ n=1, \\ n=10, \\ n=-2. \end{array}\right.$$

Тогда, натуральных n будет 7.

Ответ: 7.

3. Найти множество значений k, при которых уравнение $4x^4-5x^2-k=0$ имеет ровно три различных корня.

Решение. Введем замену $t=x^2$. Относительно t получаем уравнение

$$4t^2-5t-k=0. \tag{1}$$

Решим уравнение (1). Легко видеть, что $D=25+16\cdot k$.

Поскольку необходимо, чтобы $D \geq 0$ получаем, что $k \geq -\frac{25}{16}$. При таких k корнями уравнения будут $t_1 = \frac{5+\sqrt{25+16\cdot k}}{8}$, $t_2 = \frac{5-\sqrt{25+16\cdot k}}{8}$.

С учётом замены исходное уравнение эквивалентно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x^2 = \frac{5+\sqrt{25+16\cdot k}}{8}, \\ x^2 = \frac{5-\sqrt{25+16\cdot k}}{8}. \end{array}\right.$$

Первое уравнение совокупности имеет два различных корня. Тогда нужно, чтобы второе уравнение совокупности имело единственный корень. Это будет если $5-\sqrt{25+16\cdot k} = 0 \Leftrightarrow 5 = \sqrt{25+16\cdot k} \Leftrightarrow 25 = 25+16\cdot k \Leftrightarrow k = 0$.

Ответ: 0.

4. Решить в натуральных числах уравнение $a + \cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}} = \frac{31}{7}$. В ответе запишите $a\cdot b\cdot c$.

Решение. Очевидно, что два числа равны тогда и только тогда, когда у них совпадает целая и дробная части. Запишем уравнение в виде

$$a + \cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}} = 4 + \cfrac{1}{\cfrac{7}{3}}.$$

Так как $\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}} < 1$, то $a = 4$, а $\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}} = \cfrac{1}{\cfrac{7}{3}}$. Следовательно, $b + \frac{1}{c} = \frac{7}{3}$.

Запишем последнее соотношение в виде $b + \frac{1}{c} = 2 + \frac{1}{3}$.

Если $c = 1$, то b не натуральное число ($b = \frac{4}{3}$). Если $c > 1$, то $\frac{1}{c} < 1$ и получаем, что $b = 2,\ c = 3$. Следовательно $a\cdot b\cdot c = 4\cdot 2\cdot 3 = 24$.

Ответ: 24.

5. Сколько единиц будет в записи следующего числа $9 + 99 + 999 + \ldots + \underbrace{99\ldots9}_{2023}$?

Решение. Запишем сумму в виде

$$9+99+999+\ldots+\underbrace{99\ldots9}_{2023}=(10-1)+(10^2-1)+\ldots+(10^{2023}-1)=$$

$$=10+10^2+\ldots+10^{2023}-2023=$$

$$=\underbrace{11\ldots1111}_{2023}0-2023=\underbrace{11\ldots111}_{2019}00000+11110-2023=\underbrace{11\ldots111}_{2019}00000+9087=$$

$$=\underbrace{11\ldots111}_{2019}09087.$$

Ответ: 2019.

6. Сумма данного положительного числа и числа, ему обратного, в 13 раз меньше их кубов. Найдите это число. Если таких чисел несколько, то в ответе запишите их сумму (результат максимально упростите).

Решение. Пусть число равно a. По условию $a>0$ и

$$13(a+\frac{1}{a})=a^3+\frac{1}{a^3}.$$

Последнее уравнение эквивалентно следующим

$$13(a+\frac{1}{a})=(a+\frac{1}{a})(a^2-1+\frac{1}{a^2}).$$

$$(a+\frac{1}{a})(a^2+\frac{1}{a^2}-14)=0.$$

Так как $a+\frac{1}{a}\neq 0$, то $a^2+\frac{1}{a^2}-14=0$.

Введем замену $t=a^2$. Относительно t получаем уравнение $t^2-14t+1=0$.
Решим его. Так как $D=196-4=192=64\cdot 3$, то

$$t_1=\frac{14+8\sqrt{3}}{2}=7+4\sqrt{3},\ t_2=7-4\sqrt{3}=\sqrt{49}-\sqrt{48}>0.$$

Значит число a равно $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ или $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$, а

$$\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{(2+\sqrt{3})^2}+\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}=2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}=4.$$

Ответ: 4.

7. Какому минимальному числу школьников можно раздать 200 конфет так, чтобы среди них при любом распределении конфет нашлись двое, которым конфет достанется поровну (возможно ни одной)?

Решение. Пусть конфеты распределены среди n школьников. Тогда при любом фиксированном распределении конфет у всех школьников будет разное число конфет или найдется пара школьников, которые получат одинаковое число конфет. Если n=20, то конфеты можно распределить так, что все получат разное количество конфет. Например, каждому по 0, 1, 2,…,18, 29 конфет. Действительно

$$0+1+2+\ldots+18+29=\frac{19\cdot 18}{2}+29=171+29=200.$$

Если $3 \le n < 20$, то конфеты можно распределить так, что все получат разное количество конфет. Например, каждому по 0,1,2, …, n-2, b, где $b \ge n-1$, конфет. При n=1 и n=2 очевидно, что конфеты можно распределить так, что все получат разное число конфет. Например: 200 и 99, 101.

Пусть $n \ge 21$. Если первый школьник получил a_1 конфеты, второй a_2 конфеты и так далее n-й школьник a_n конфет, то

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = 200.$$

Предположим, что все школьники получили разное число конфет, тогда можно считать, что $a_1 < a_2 < ... < a_n$. В этом случае $a_1 \ge 0, a_2 \ge 1, ..., a_n \ge n-1$. Общее число конфет можно оценить так:

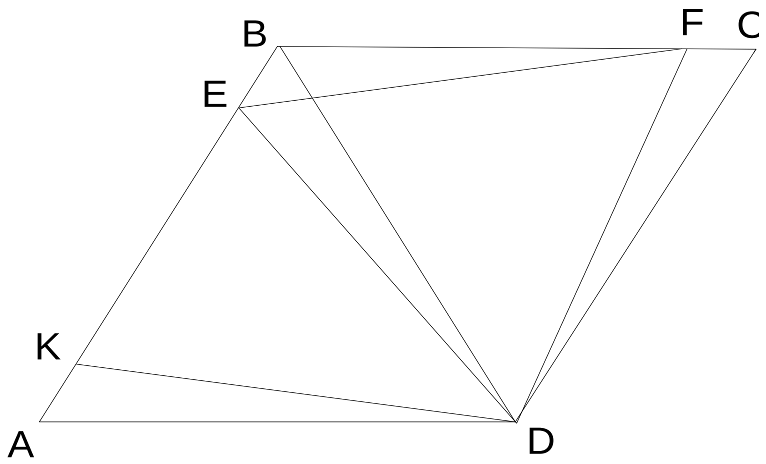
$$a_1 + a_2 + ... + a_n \ge 0 + 1 + 2 + ... + n - 1 = \frac{n \cdot (n-1)}{2} \ge \frac{21 \cdot 20}{2} = 210.$$

Такого быть не может. Следовательно, при $n \ge 21$ найдутся двое школьников, которым конфет достанется поровну.

Ответ: 21.

8. Точки E и F лежат, соответственно, на сторонах AB и BC ромба $ABCD$, причем $AE = 5 \cdot BE$, $BF = 5 \cdot CF$. Известно, что треугольник DEF равносторонний. Найдите величину угла BAD.

Решение.



Пусть сторона ромба равна $6 \cdot x$, а сторона ΔEFD равна y. Отметим на стороне AB точку K так, что $AK = BE = x$. $\Delta AKD = \Delta FCD$ по первому признаку равенства треугольников ($AK = BE = x$, $AD = CD = 6x$, $\angle KAD = \angle FCD$). Тогда $KD = FD = y$, $\angle EKD = \angle DEK = \alpha$ (ΔKED равнобедренный). $\Delta AKD = \Delta BED$ по первому признаку равенства треугольников ($AK = BE = x$, $KD = ED = y$, $\angle AKD = 180^0 - \alpha = \angle BED$). Тогда $AD = BD = 6 \cdot x$.

В ΔABD $AD = BD = AB = 6 \cdot x$. Значит ΔABD равносторонний и следовательно $\angle BAD = 60^0$.

Ответ: 60^0.