Воронежский государственный университет
Математический факультет. Олимпиада по математике
10 - 11 классы. Очный тур. Вариант 1

1. Может ли дискриминант квадратного уравнения с целыми коэффициентами равняться 2002? **(10 баллов)**

Решение. Рассмотрим уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b, c – целые числа.

Тогда дискриминант уравнения равен

$$D = b^2 - 4ac = 2002 \Rightarrow b^2 = 2002 + 4ac = 2(1001 + 2ac) \Rightarrow b = 2k, k \in Z.$$

Тогда $4k^2 - 4ac = 2002$. Последнее равенство не может быть выполнено, так как его левая часть делится на 4, а правая нет.

Ответ: нет.

2. Решить в целых числах уравнение $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{50}$. **(18 баллов)**

Решение. ОДЗ: $x, y \geq 0$. Запишем уравнение в виде $\sqrt{y} = \sqrt{50} - \sqrt{x}$.

Возведя последнее равенство в квадрат получим

$$y = 50 + x - 10\sqrt{2x} \Rightarrow \sqrt{2x} \in N \cup \{0\} \Rightarrow x = 2k^2, k = 0,1,2,...$$

Из уравнения следует, что $\sqrt{x} \leq \sqrt{50} \Rightarrow 2k^2 \leq 50 \Rightarrow k^2 \leq 25$.

Таким образом, возможно только, что $x = 2k^2, k = 0,1,2,3,4,5$.

Рассмотрим все возможные случаи.

Если $x = 0$, то $\sqrt{y} = \sqrt{50} \Rightarrow y = 50$.

Если $x = 2$, то $\sqrt{y} = \sqrt{50} - \sqrt{2} = 4\sqrt{2} \Rightarrow y = 32$.

Если $x = 8$, то $\sqrt{y} = \sqrt{50} - \sqrt{8} = 3\sqrt{2} \Rightarrow y = 18$.

Если $x = 18$, то $\sqrt{y} = \sqrt{50} - \sqrt{18} = 2\sqrt{2} \Rightarrow y = 8$.

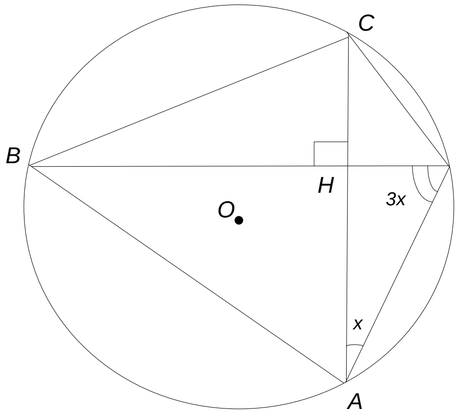
Если $x = 32$, то $\sqrt{y} = \sqrt{50} - \sqrt{32} = \sqrt{2} \Rightarrow y = 2$.

Если $x = 50$, то $\sqrt{y} = \sqrt{50} - \sqrt{50} = 0 \Rightarrow y = 0$.

Ответ: (0;50), (2;32), (8;18), (18;8), (32;2), (50;0).

3. В окружность с центром в точке O вписан четырёхугольник ABCD, диагонали которого перпендикулярны. Известно, что $\angle AOB = 3\angle COD$. Найти площадь круга если $CD = 10$. **(18 баллов)**

Решение. Из условия следует, что $3\cup CD = \cup AB$. Пусть $\angle CAD = x$, тогда $\angle BDA = 3x$. Из прямоугольного треугольника AHD находим, что $x + 3x = 90 \Rightarrow x = 45/2$.



Воспользовавшись теоремой синусов для треугольника CAD получаем, что

$$R=\frac{CD}{2\sin\angle CAD}=\frac{10}{2\sin(45/2)}=\frac{5}{\sin(45/2)},$$

где R – радиус описанной окружности.

Следовательно,

$$S=\pi R^2=\pi\frac{25}{\sin^2(45/2)}=\frac{50\pi}{1-\cos 45}=\frac{50\pi}{1-\sqrt{2}/2}=\frac{100\pi}{2-\sqrt{2}}=50\pi(2+\sqrt{2}).$$

Ответ: $50\pi(2+\sqrt{2})$.

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(1+x^2)^a+(b^2+2b+2)^y=2,\\ x^4y^2+a^2=9,\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение при любом значении параметра b. **(18 баллов)**

Решение. Система должна иметь решение, в частности, при $b=-1$. При этом значении она принимает вид

$$\begin{cases}(1+x^2)^a=1,\\ x^4y^2+a^2=9,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a=0,\\ x=0,\end{array}\right.\\ x^4y^2+a^2=9.\end{cases}$$ Откуда находим, что $a=0$ или $a=\pm3$.

При $a=0$ исходная система принимает вид

$$\begin{cases}(b^2+2b+2)^y=1,\\ x^4y^2=9.\end{cases}\qquad(1)$$

Если $b=0$, то система (1) примет вид $\begin{cases}2^y=1,\\ x^4y^2=9,\end{cases}$ $\begin{cases}y=0,\\ x^4y^2=9\end{cases}$, не имеет решения.

Если $a=\pm3$ исходная система примет вид $\begin{cases}(1+x^2)^{\pm3}+(b^2+2b+2)^y=2,\\ x^4y^2=0\end{cases}$

и при любом b имеет решение $(0,0)$.

Ответ: $a=\pm3$.

5. Решить неравенство $2^y-2\cos x+\sqrt{y-x^2-1}\le 0$. **(18 баллов)**

Решение. ОДЗ: $y-x^2-1\ge 0\Rightarrow x^2+1\le y\Rightarrow y\ge 1$. Тогда

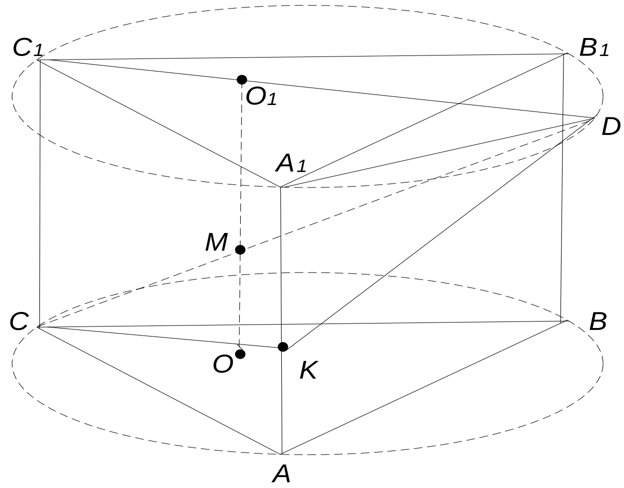
$$2^y-2\cos x\ge 2-2\cdot 1=0.$$

Следовательно, неравенство эквивалентно системе

$$\begin{cases}2^y=2,\\ 2\cos x=2,\\ y-x^2-1=0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1,\\ x=0.\end{cases}$$

Ответ: $(0;1)$.

6. В сферу вписана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ с основанием ABC и боковыми рёбрами AA_1, BB_1, CC_1. Отрезок CD – диаметр этой сферы, точка K– середина ребра AA_1. Найти объём призмы, если $CK = 2\sqrt{6}$, $DK = 4$. **(18 баллов)**



Решение. Плоскости ABC и $A_1B_1C_1$ пересекают сферу по окружностям с центрами в точках O и O_1. Середина отрезка OO_1 – точка M является центром сферы. Пусть C_1D – диаметр окружности с центром в точке O_1. Тогда CD – диаметр сферы (действительно, плоскости CC_1D принадлежит отрезок OO_1, так как $C_1O_1 = O_1D$, то отрезки OO_1 и CD пересекаются в точке M).

Пусть радиусы окружностей с центрами в точках O и O_1 равны r, а $A_1A = h$. Тогда $A_1K = KA = \frac{h}{2}$, $AC = \sqrt{3}r$, $A_1D = r$. Из прямоугольных треугольников AKC и KDA_1 находим

$$\begin{cases} AC^2 + AK^2 = CK^2, \\ A_1K^2 + A_1D^2 = DK^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3r^2 + \dfrac{h^2}{4} = 24, \\ \dfrac{h^2}{4} + r^2 = 16, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 2, \\ h = 4\sqrt{3}. \end{cases}$$

Следовательно, $S_{\Delta ABC} = \dfrac{AC^2 \sin 60}{2} = \dfrac{3r^2 \sin 60}{2} = 3\sqrt{3}$, а

$$V = S_{\Delta ABC} \cdot AA_1 = 3\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} = 36.$$

Ответ: 36.

Воронежский государственный университет
Математический факультет. Олимпиада по математике
10 - 11 классы. Очный тур. Вариант 2

1. Может ли дискриминант квадратного уравнения с целыми коэффициентами равняться 2004? **(10 баллов)**

Решение. Рассмотрим уравнение $ax^2+bx+c=0,$ где a,b,c – целые числа.

Тогда дискриминант уравнения равен

$$D=b^2-4ac=2004 \Rightarrow b^2=2004+4ac=2(1002+2ac) \Rightarrow b=2k, k\in Z.$$

Тогда $4k^2-4ac=2004,$ <=> $k^2-ac=501.$ Легко видеть, что числа $k=22, a=1, c=-17$ будут решением последнего уравнения. Следовательно, дискриминант может равняться 2004.

Ответ: да.

2. Решить в целых числах уравнение $\sqrt{x-\frac{1}{5}}+\sqrt{y-\frac{1}{5}}=\sqrt{5}.$ **(18 баллов)**

Решение. $x,y\geq\frac{1}{5}$. Запишем уравнение в виде $\sqrt{5x-1}+\sqrt{5y-1}=\sqrt{25},$ <=>

$\sqrt{5y-1}=\sqrt{25}-\sqrt{5x-1}.$ $\sqrt{5y-1}=\sqrt{25}-\sqrt{5x-1}.$ $\sqrt{5y-1}=\sqrt{25}-\sqrt{5x-1}.$

Возведя последнее равенство в квадрат получим

$$5y-1=25+5x-1-10\sqrt{5x-1} \Rightarrow y-x-5=-2\sqrt{5x-1} \Rightarrow 5x-1=k^2, k=0,1,2,...$$

Из уравнения следует, что $\sqrt{5y-1}=\sqrt{25}-\sqrt{5x-1}.$

$$\sqrt{5x-1}=k\leq\sqrt{25}=5 \Rightarrow k\leq 5.$$

С учётом ОДЗ ($x\geq 1 \Rightarrow k^2\geq 4$) возможно только, что

$$5x-1=k^2 \Leftrightarrow x=\frac{k^2+1}{5}, k=2,3,4,5.$$

Рассмотрим все возможные случаи.

Если $k=2,$ то $x=1$ и $\sqrt{5y-1}=\sqrt{25}-\sqrt{4}=3 \Rightarrow y=2$.

Если $k=3,$ то $x=2$ и $\sqrt{5y-1}=\sqrt{25}-\sqrt{9}=2 \Rightarrow y=1.$

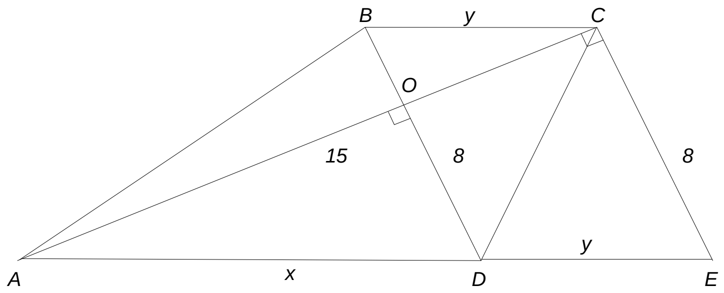
Если $k=4,$ то $x=\frac{17}{5}$. Если $k=5,$ то $x=\frac{26}{5}$. Последние 2 значения неизыестной не являются целыми числами.

Ответ: (1;2), (2;1).

3. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны и равны 8 и 15. Найти среднюю линию трапеции. **(18 баллов)**

Решение.

Пусть *BC=y*, *AD=x* – основания трапеции. Проведём *CE* параллельно *BD*. Тогда *BCED* – параллелограмм. Следовательно, *CE=8*, *AE=x+y*. Так как *BD* перпендикулярна *AC*, то *CE* перпендикулярна *AC*. Из прямоугольного треугольника *ACE* находим, что



$$x+y=AE=\sqrt{AC^2+CE^2}=\sqrt{225+64}=17.$$

Таким образом, средняя линия трапеции ABCD равна

$$\frac{x+y}{2}=\frac{17}{2}=8,5.$$

Ответ: 8,5.

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2^{bx}+(a+1)by^2=a^2, \\ (a-1)x^3+y^3=1, \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение при любом значении параметра b. **(18 баллов)**

Решение. Система должна иметь решение, в частности, при $b=0$. При этом значении первое уравнение системы примет вид $a^2=1$. Откуда находим, что $a=\pm 1$. При $a=1$ исходная система принимает вид

$$\begin{cases} 2^{bx}+2by^2=1, \\ y^3=1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{bx}=1-2b, \\ y=1, \end{cases} \qquad (1)$$

Если $b=1$, то система (1) примет вид $\begin{cases} 2^{x}=-1 \\ y=1, \end{cases}$ и не имеет решения.

Если $a=-1$ исходная система примет вид $\begin{cases} 2^{bx}=1, \\ -2x^3+y^3=1, \end{cases}$

и при любом b имеет решение $(0,1)$.

Ответ: $a=-1$.

5. Решить неравенство $\cos x \geq y^2+\sqrt{y-x^2-1}$. **(18 баллов)**

Решение. ОДЗ: $y-x^2-1\geq 0 \Rightarrow x^2+1\leq y \Rightarrow y\geq 1$. Тогда

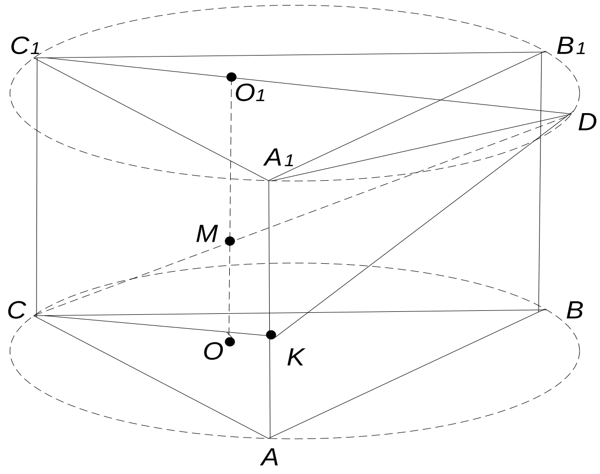
$$y^2+\sqrt{y-x^2-1}\geq 1.$$

Следовательно, неравенство эквивалентно системе

$$\begin{cases} y^2=1, \\ \cos x=1, \\ y-x^2-1=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1, \\ x=0. \end{cases}$$

Ответ: $(0;1)$.

6. В сферу вписана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ с основанием ABC и боковыми рё-брами AA_1, BB_1, CC_1. Отрезок CD – диаметр этой сферы, точка K– середина ребра AA_1. Найти объём призмы, если $CK=\sqrt{6},\ DK=2$. **(18 баллов)**



Решение.

Плоскости ABC и $A_1B_1C_1$ пересекают сферу по окружностям с центрами в точках O и O_1. Середина отрезка OO_1 – точка M является центром сферы. Пусть C_1D – диаметр окружности с центром в точке O_1. Тогда CD – диаметр сферы (действительно, плоскости CC_1D принадлежит отрезок OO_1, так как $C_1O_1=O_1D$, то отрезки OO_1 и CD пересекаются в точке M).

Пусть радиусы окружностей с центрами в точках O и O_1 равны r, а $A_1A=h$. Тогда $A_1K=KA=\dfrac{h}{2},\ AC=\sqrt{3}r,\ A_1D=r.$ Из прямоугольных треугольников AKC и KDA_1 находим

$$\begin{cases} AC^2+AK^2=CK^2, \\ A_1K^2+A_1D^2=DK^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3r^2+\dfrac{h^2}{4}=6, \\ \dfrac{h^2}{4}+r^2=4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r=1, \\ h=2\sqrt{3}. \end{cases}$$

Следовательно, $S_{\Delta ABC}=\dfrac{AC^2\sin 60}{2}=\dfrac{3r^2\sin 60}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$, а

$$V=S_{\Delta ABC}\cdot AA_1=\frac{3\sqrt{3}}{4}\cdot 2\sqrt{3}=4,5.$$

Ответ: 4,5.