Воронежский государственный университет
Математический факультет. Олимпиада по математике
8 - 9 классы. Очный тур. Вариант 1

1. Дан выпуклый n-угольник. Найти все значения n для которых сумма углов n-угольника будет больше суммы внешних углов этого n-угольника, взятых по одному при каждой его вершине. **(10 баллов)**

Решение. Сумма углов выпуклого n-угольника равна $180^0 \cdot (n-2)$. Сумма внешних углов выпуклого n-угольника, взятых по одному при каждой его вершине, равна 360^0. Тогда нужно, чтобы $180^0 \cdot (n-2) > 360^0 \Leftrightarrow n > 4$.

Ответ: $n > 4$.

2. Пусть a, b, c целые числа, причём $a+b+c$ делится на 6. Доказать, что $a^5 + b^3 + c$ также делится на 6. **(18 баллов)**

Решение. По условию $a+b+c = 6 \cdot n$, где n – целое число.

Произведение трёх последовательных целых чисел делится на 6 так как среди этих чисел найдется число кратное 2 и кратное 3. Тогда число

$$A = a^5 + b^3 + c - (a+b+c) = a \cdot (a^4 - 1) + b \cdot (b^2 - 1) = a \cdot (a^2 - 1) \cdot (a^2 + 1) +$$
$$+ b \cdot (b-1) \cdot (b+1) = a \cdot (a-1) \cdot (a+1) \cdot (a^2+1) + b \cdot (b-1) \cdot (b+1) =$$
$$= (a-1) \cdot a \cdot (a+1) \cdot (a^2+1) + (b-1) \cdot b \cdot (b+1) = 6 \cdot r,$$

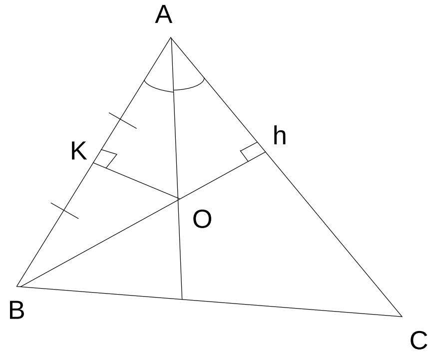
где r – целое число. Следовательно,

$$a^5 + b^3 + c = A + a + b + c = 6 \cdot n + 6 \cdot r = 6 \cdot (n+r),$$

то есть делится на 6.

3. В треугольнике ABC биссектриса из вершины A, высота из вершины B и серединный перпендикуляр к стороне AB пересекаются в одной точке. Найти величину угла A. **(18 баллов)**

Решение.



Пусть O – точка пересечения биссектрисы, высоты и серединного перпендикуляра. Основание высоты обозначим – h, основание серединного перпендикуляра обозначим – K, а величину угла A – $2 \cdot \alpha$. ΔAOK=ΔBOK по первому признаку (AK=BK, KO -общая, $\angle$AKO= = $\angle$BKO=90^0).

Тогда $\angle$ABh=$\angle$BAO=α. В прямоугольном треугольнике ABh: $\angle$BAh+$\angle$hBA=$3 \cdot \alpha = 90^0$. Следовательно, $\alpha = 30^0$, а $\angle$A=$2 \cdot \alpha = 60^0$.

Ответ: 60^0.

4. При каких значениях a уравнение $(a^2-1)x = a^3 - a^2 - 4a + 4$ имеет более одного решения? **(18 баллов)**

Решение. Запишем уравнение в виде

$$(a-1)\cdot(a+1)\cdot x = a^2\cdot(a-1) - 4\cdot(a-1) = (a^2-4)\cdot(a-1) = (a-2)\cdot(a-1)\cdot(a+2).$$

Если $a=1$, то уравнение примет вид $0\cdot x = 0$. Его решением будет любое число. Если $a=-1$, то уравнение примет вид $0\cdot x = 6$. Оно не имеет решений. Если $a \neq 1$ и $a \neq -1$, то решением уравнения будет

$$x = \frac{(a-2)\cdot(a-1)\cdot(a+2)}{(a-1)\cdot(a+1)} = \frac{(a-2)\cdot(a+2)}{a+1} = \frac{a^2-4}{a+1}.$$

Ответ: $a=1$.

5. Решить систему $\begin{cases} 4a^2 + 5c^2 = 8ab, \\ 7b^2 + 9d^2 = 6cd. \end{cases}$ **(18 баллов)**

Решение. Сложив уравнения системы получим $4a^2 + 5c^2 + 7b^2 + 9d^2 = 8ab + 6cd.$ Отсюда или $(2a-2b)^2 + (c-3d)^2 + 3b^2 + 4c^2 = 0$. Получаем $\begin{cases} 2a-2b=0, \\ c-3d=0, \\ b=0, \\ c=0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0, \\ b=0, \\ c=0, \\ d=0. \end{cases}$

Проверкой убеждаемся в том, что найденное решение является решением системы.

Ответ: $a=0, b=0, c=0, d=0.$

6. Игра начинается с числа 2. За ход разрешается прибавить к имеющемуся числу любое натуральное число, меньшее его. Выиграет тот, кто получит 63. Кто выиграет в эту игру, если играют двое (первый игрок, который прибавляет число к 2 или второй игрок, который делает ход за первым)? Описать и обосновать выигрышную стратегию. **(18 баллов)**

Решение. Если после хода первого игрока получилось число n ($n \geq 2$), то после хода второго игрока может получиться только число b такое, что

$$n+1 \leq b \leq 2n-1.$$

Следующим ходом первый игрок всегда может прибавить число меньшее или равное n и независимо от хода второго игрока получить число 2n или число 2n+1. Тогда выиграет первый игрок.

Выигрышная стратегия: первый последовательно делает числа 3, 7, 15, 31, 63.

Ответ: выиграет первый игрок.

Воронежский государственный университет
Математический факультет. Олимпиада по математике
8 - 9 классы. Очный тур. Вариант 2

1. Дан выпуклый n-угольник. Найти все значения n для которых сумма углов n-угольника будет меньше или равна суммы внешних углов этого n-угольника, взятых по одному при каждой его вершине. **(10 баллов)**

Решение. Сумма углов выпуклого n-угольника равна $180^0 \cdot (n-2)$. Сумма внешних углов выпуклого n-угольника, взятых по одному при каждой его вершине, равна 360^0. Тогда нужно, чтобы $180^0 \cdot (n-2) \le 360^0 \Leftrightarrow n \le 4$.

Ответ: $n=4$ и $n=3$.

2. Пусть a, b, c целые числа, причём $a+b+c$ делится на 6. Доказать, что a^7+b+c^3 также делится на 6. **(18 баллов)**

Решение. По условию $a+b+c=6\cdot n$, где n – целое число.

Произведение трёх последовательных целых чисел делится на 6 так как среди этих чисел найдется число кратное 2 и кратное 3. Тогда число

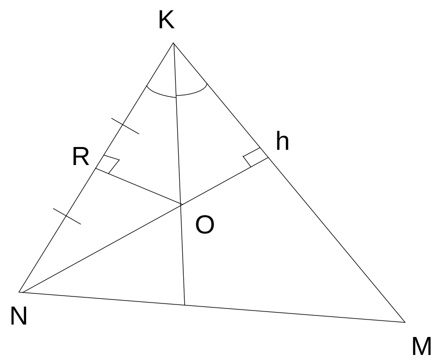
$$A=a^7+b+c^3-(a+b+c)=a\cdot(a^6-1)+c\cdot(c^2-1)=a\cdot(a^3-1)\cdot(a^3+1)+$$
$$+c\cdot(c-1)\cdot(c+1)=a\cdot(a-1)\cdot(a^2+a+1)\cdot(a+1)\cdot(a^2-a+1)+c\cdot(c-1)\cdot(c+1)=$$
$$=(a-1)\cdot a\cdot(a+1)\cdot(a^2+a+1)\cdot(a^2-a+1)+c\cdot(c-1)\cdot(c+1)=6\cdot r,$$

где r – целое число.

Следовательно, $a^7+b+c^3=A+a+b+c=6\cdot n+6\cdot r=6\cdot(n+r)$,

то есть делится на 6.

3. В треугольнике KMN биссектриса из вершины K, высота из вершины N и серединный перпендикуляр к стороне NK пересекаются в одной точке. Найти величину угла K. **(18 баллов)**



Решение. Пусть O – точка пересечения биссектрисы, высоты и серединного перпендикуляра. Основание высоты обозначим – h, основание серединного перпендикуляра обозначим – R, а величину угла K – $2\cdot\alpha$. ΔKOR=ΔNOR по первому признаку (KR=NR, RO -общая, $\angle$KRO=$\angle$NRO=90^0).

Тогда $\angle$KNh=$\angle$NKO=α. В прямоугольном треугольнике NKh: $\angle$NKh+$\angle$hNK=$3\cdot\alpha=90^0$. Следовательно, $\alpha=30^0$, а $\angle K=2\cdot\alpha=60^0$.

Ответ: 60^0.

4. При каких значениях a уравнение $(a^2-4)x = a^3+2a^2-a-2$ имеет более одного решения? **(18 баллов)**

Решение. Запишем уравнение в виде

$$(a-2)\cdot(a+2)\cdot x = a^2\cdot(a+2)-(a+2) = (a^2-1)\cdot(a+2) = (a-1)\cdot(a+1)\cdot(a+2).$$

Если $a=2$, то уравнение примет вид $0\cdot x = 12$. Оно не имеет решений.

Если $a=-2$, то уравнение примет вид $0\cdot x = 0$. Его решением будет любое число. Если $a \neq -2$ и $a \neq 2$, то решением уравнения будет

$$x = \frac{(a-1)\cdot(a+1)\cdot(a+2)}{(a-2)\cdot(a+2)} = \frac{(a-1)\cdot(a+1)}{a-2} = \frac{a^2-1}{a-2}.$$

Ответ: $a=-2$.

5. Решить систему $\begin{cases} 6a^2+3c^2=6ab, \\ 9b^2+4d^2=4cd. \end{cases}$ **(18 баллов)**

Решение. Сложив уравнения системы получим

$6a^2+3c^2+9b^2+4d^2=6ab+4cd.$ Отсюда

$(a^2-6ab+9b^2)+(c^2-4cd+4d^2)+5a^2+2c^2=0.$ или

$(a-3b)^2+(c-2d)^2+5a^2+2c^2=0$, т.е. $\begin{cases} a-3b=0, \\ c-2d=0, \\ a=0, \\ c=0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0, \\ b=0, \\ c=0, \\ d=0. \end{cases}$

Проверкой убеждаемся в том, что найденное решение является решением системы.

Ответ: $a=0, b=0, c=0, d=0.$

6. Игра начинается с числа 2. За ход разрешается прибавить к имеющемуся числу любое натуральное число, меньшее его. Выиграет тот, кто получит 62. Кто выиграет в эту игру, если играют двое (первый игрок, который прибавляет число к 2 или второй игрок, который делает ход за первым)? Описать и обосновать выигрышную стратегию. **(18 баллов)**

Решение. Если после хода 1-го игрока получилось число n ($n \geq 2$), то после хода второго игрока может получиться только число b такое, что

$$n+1 \leq b \leq 2n-1.$$

Следующим ходом первый игрок всегда может прибавить число меньшее или равное n и независимо от хода второго игрока получить число 2n или число 2n+1. Тогда выиграет первый игрок.

Выигрышная стратегия: первый последовательно делает числа 3, 7, 15, 31, 62.

Ответ: выиграет первый игрок.