Воронежский государственный университет
Математический факультет. Олимпиада по математике
6 - 7 классы. Очный тур. Вариант 1

1. Найти значение выражения $9\cdot(1\frac{1}{9}-5\frac{1}{3}):(-\frac{1}{5}+2{,}1)$. **(10 баллов)**

Решение. $9\cdot(1\frac{1}{9}-5\frac{1}{3}):(-\frac{1}{5}+2{,}1)=9\cdot(\frac{10}{9}-\frac{16}{3}):(-\frac{1}{5}+\frac{21}{10})=$

$=9\cdot\frac{10-48}{9}:\frac{-2+21}{10}=9\cdot\frac{-38}{9}\cdot\frac{10}{19}=-20.$

Ответ: -20.

2. В математическом кружке девочек более 93%, но есть и мальчики. Какое наименьшее количество участников может быть в таком кружке? **(18 баллов)**

Решение. Пусть в кружке n человек, среди которых m мальчиков. Тогда m меньше, чем $\frac{7n}{100}$. Так как m натуральное число, что

$$\frac{7n}{100}>1\Rightarrow n>\frac{100}{7}=14\frac{2}{7}.$$

Следовательно, n не меньше 15. Проверим, может ли $n=15$. Если среди 15 человек 14 девочек, то процент девочек равен $\frac{14}{15}\cdot 100=\frac{280}{3}=93\frac{1}{3}>93$. Таким образом, наименьшее количество участников 15.

Ответ: 15.

3. Точка С делит отрезок АВ в отношении 3:2, считая от точки А, точка D делит отрезок ВС в отношении 3:1, считая от точки В, точка Е – середина отрезка ВС. Найти отношение длин отрезков АВ и DE. **(18 баллов)**

Решение.

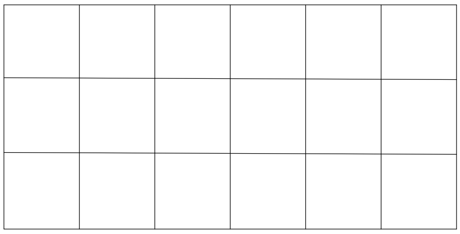
Пусть длина $CD=x$. Тогда $DB=3x$, а $CB=4x$. Так как точка Е – середина отрезка ВС, то $CE=2x$, а $DE=x$. По условию $AB=\frac{5}{2}BC=\frac{20x}{2}=10x$.

Следовательно, $\frac{AB}{DE}=\frac{10x}{x}=10$.

Ответ: 10.

4. Скольким различными способами можно вырезать прямоугольник по клеткам доски, размер которой 3×6 клеток? **(18 баллов)**

Решение. Прямоугольник однозначно определяется положением его сторон.



Горизонтальная сторона может занимать любые из 4 положений. Тогда способов выбора горизонтальных сторон равно $C_4^2 = 6$. Вертикальная сторона может занимать любое из 7 положений. Тогда способов выбора вертикальных сторон равно $C_7^2 = 21$. Значит, всего прямоугольников будет $6 \cdot 21 = 126$.

Ответ: 126.

5. Найти наименьшее натуральное число, которое при делении на 2, 3, 5, 7, и 11 даёт в остатке 1. **(18 баллов)**

Решение. Пусть искомое число N. Тогда $N-1$ делится на 2, $N-1$ делится на 3, $N-1$ делится на 5, $N-1$ делится на 7, $N-1$ делится на 11. Поскольку числа 2, 3, 5, 7, и 11 взаимно простые, то $N-1$ делится на их произведение.

Значит $N-1 = 2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot k$, где k – некоторое натуральное число. Следовательно,

$$N = 2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot k + 1.$$

Тогда минимальным N будет при $k=1$, то есть при

$$N = 2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11 + 1 = 2311.$$

Ответ: 2311.

6. Докажите, что при любом натуральном n число n^3+11n делится нацело на 6. **(18 баллов)**

Решение. Произведение трёх последовательных натуральных чисел делится на 6 так как среди этих чисел будут числа делящиеся на 2 и на 3.

$$n^3+11n = n^3 - n + 12n = n(n^2-1) + 12n = n(n-1)(n+1) + 12n =$$
$$= (n-1)n(n+1) + 12n = \underbrace{(n-1)n(n+1)}_{\vdots 6} + \underset{\vdots 6}{12n}.$$

Воронежский государственный университет
Математический факультет. Олимпиада по математике
Очный тур. 6 - 7 классы. Вариант 2

1. Найти значение выражения $10\cdot(\frac{2}{5}-6,6):(-1\frac{1}{4}-1\frac{1}{3})$. **(10 баллов)**

Решение. $10\cdot(\frac{2}{5}-6,6):(-1\frac{1}{4}-1\frac{1}{3})=10\cdot(\frac{2}{5}-\frac{33}{5}):(-\frac{5}{4}-\frac{4}{3})=$

$=10\cdot\frac{-31}{5}:\frac{-15-16}{12}=-62\cdot\frac{12}{-31}=24.$

Ответ: 24.

2. В математическом кружке есть девочки, причем их менее 5%. Какое наименьшее количество участников может быть в таком кружке? **(18 баллов)**

Решение. Пусть в кружке n человек среди которых d девочек. Тогда девочек меньше, чем $\frac{5n}{100}$. Так как d натуральное число, что

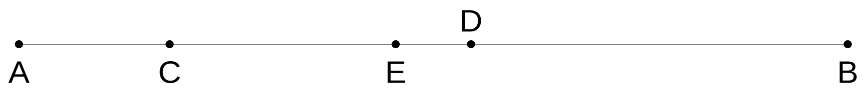
$$\frac{5n}{100}>1\Rightarrow n>20.$$

Следовательно, n не меньше 21. Проверим, может ли $n=21$. Если среди 21 человек 1 девочка, то процент девочек равен $\frac{1}{21}\cdot 100=\frac{100}{21}=4\frac{16}{21}<5$. Таким образом, наименьшее количество участников 21.

Ответ: 21.

3. Точки C и D делят отрезок AB в отношении 1:2:3, считая от A, точка E делит отрезок CD в отношении 3:1, считая от C. Найти отношение длин отрезков AB и CE. **(18 баллов)**

Решение.

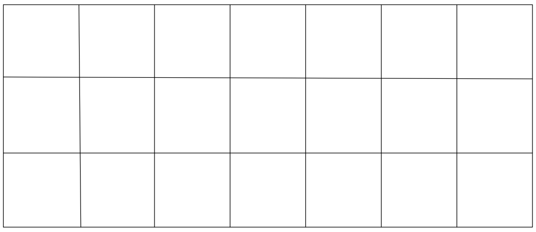


Пусть длина $ED=x$. Тогда $CE=3x$, а $CD=4x$. Из условия следует, что $AC=2x$, а $DB=6x$. Значит $AB=12x$.Следовательно,

$$\frac{AB}{CE}=\frac{12x}{3x}=4.$$

Ответ: 4.

4. Сколькими различными способами можно вырезать прямоугольник по клеткам доски, размер которой 3×7 клеток? **(18 баллов)**
Решение. Прямоугольник однозначно определяется положением его сторон.



Горизонтальная сторона может занимать любые из 4 положений. Тогда число способов выбора горизонтальных сторон равно $C_4^2 = 6$. Вертикальная сторона может занимать любое из 8 положений. Тогда число способов выбора горизонтальных сторон равно $C_8^2 = 28$. Значит, всего прямоугольников будет $6\cdot 28 = 168$.
Ответ: 168.
5. Найти наименьшее натуральное число, которое при делении на 2, 3, 5, 7, и 13 даёт в остатке 1. **(18 баллов)**
Решение. Пусть искомое число N. Тогда $N-1$ делится на 2, $N-1$ делится на 3, $N-1$ делится на 5, $N-1$ делится на 7, $N-1$ делится на 13. Поскольку числа 2, 3, 5, 7, и 13 взаимно простые, то $N-1$ делится на их произведение. Значит $N-1 = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 13\cdot k$, где k – некоторое натуральное число. Следовательно, $N = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 13k + 1$. Тогда минимальным N будет при $k=1$, то есть при $N = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 13 + 1 = 2731$.
Ответ: 2731.
6. Докажите, что при любом натуральном n число $n^3 + 17n$ делится нацело на 6.
Решение. Произведение трёх последовательных натуральных чисел делится на 6 так как среди этих чисел будут числа делящиеся на 2 и на 3. **(18 баллов)**

$$n^3 + 17n = n^3 - n + 18n = n(n^2-1) + 18n = n(n-1)(n+1) + 18n =$$
$$= (n-1)n(n+1) + 18n = \underbrace{(n-1)n(n+1)}_{\vdots 6} + \underset{\vdots 6}{18n}.$$