10-11 класс. Заочный (отборочный) тур

1. Записать в ответе наибольшее значение $n+m$, где пара чисел m, n – решения уравнения:

$$1+2^{m}+2^{2\cdot m}+\ldots+2^{n\cdot m}=2024,$$

m – целое, n – натуральное.

Решение. Пусть $m\in \mathrm{Z},\ m>0$, тогда $1+2^{m}+2^{2\cdot m}+\ldots+2^{n\cdot m}$ – нечётное число, и равенство невозможно.

Пусть $m\in \mathrm{Z},\ m<0$, тогда, воспользовавшись формулой для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, получаем, что

$$1+2^{m}+2^{2\cdot m}+\ldots+2^{n\cdot m}<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{2}}+\ldots+\frac{1}{2^{r}}+\ldots<\frac{1}{1-1/2}=2$$

и равенство невозможно.

Пусть $m=0$, тогда уравнение примет вид:

$$1+n=2024,$$

откуда $n=2023$.

Следовательно, $n+m=2023+0=2023$.

Ответ: 2023.

2. Решить уравнение:

$$\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}}{2}=x+\sqrt{x^{2}-16}-6.$$

Решение. ОДЗ:

$$\begin{cases} x-4\geq 0, \\ x+4\geq 0, \\ x^{2}-16\geq 0. \end{cases}$$

Откуда ОДЗ: $x\geq 4$.

Возведя уравнение в квадрат, получим:

$$\frac{x+4+2\sqrt{x^{2}-16}+x-4}{4}=x^{2}+x^{2}-16+36+2x\sqrt{x^{2}-16}-12x-12\sqrt{x^{2}-16}.$$

После приведения подобных слагаемых и группировки последнее уравнение можно записать в виде:

$$4x^{2}+4x\sqrt{x^{2}-16}+40-25(x+\sqrt{x^{2}-16})=0. \qquad (1)$$

Отметим, что уравнение (1) является следствием исходного уравнения.

Введем замену $t = x + \sqrt{x^2 - 16}$. Тогда $4x^2 + 4x\sqrt{x^2 - 16} = 2t^2 + 32$. Относительно t получаем уравнение

$$2t^2 - 25t + 72 = 0.$$

Решив его, находим:

$$\left[\begin{array}{l} t = 8, \\ t = 4{,}5. \end{array}\right.$$

Вернувшись к старым переменным, получим, что

$$\left[\begin{array}{l} x + \sqrt{x^2 - 16} = 8, \\ x + \sqrt{x^2 - 16} = 4{,}5. \end{array}\right.$$

Откуда:

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2 - 16} = 8 - x, \\ \sqrt{x^2 - 16} = 4{,}5 - x. \end{array}\right.$$

Решив последнюю совокупность, находим, что

$$\left[\begin{array}{l} x = 5, \\ x = \dfrac{145}{36}. \end{array}\right.$$

Проверкой убеждаемся, что $x = 5$ – корень исходного уравнения, а $x = \dfrac{145}{36}$ нет.

Ответ: 5.

3. Производство x тысяч единиц продукции обходится в $q = 3x^2 + x + 6$ миллионов рублей в год. При цене p тысяч рублей за единицу продукции годовая прибыль в миллионах рублей составляет $px - q$. При каком наименьшем p через 11 лет суммарная прибыль может составлять не менее 66 миллионов рублей при некотором значении x, если p и x остаются неизменными на протяжении 11 лет?

Решение. Пусть за один год производится x тысяч единиц продукции. Тогда $x > 0$. Через $\Pi p(x)$ обозначим прибыль за один год. Тогда:

$$\Pi p(x) = px - 3x^2 - x - 6 = -3x^2 + (p-1)x - 6,$$

а прибыль за 11 лет составит:

$$11\Pi p(x) = 11(-3x^2 + (p-1)x - 6)\,.$$

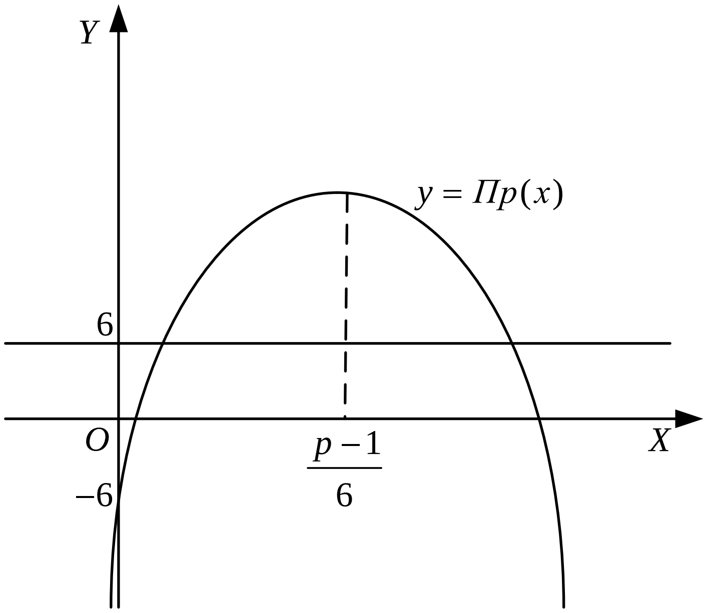
Требуется найти наименьшее $p > 0$, при котором существует $x > 0$, такое что

$$11\Pi p(x) \geq 66\,.$$

Последнее неравенство эквивалентно следующему:

$$\Pi p(x) = -3x^2 + (p-1)x - 6 \geq 6\,. \qquad (1)$$

Графиком $\Pi p(x)$ является парабола с ветвями, направленными вниз, и абсциссой вершины $\dfrac{p-1}{6}$. Так как $\Pi p(0) = -6 < 0$, то неравенство (1) будет выполнено для некоторого $x > 0$, если



Ситуация, изображенная на рисунке, реализуется в том и только том случае, когда:

$$\begin{cases} \dfrac{p-1}{6} > 0, \\ \Pi p\left(\dfrac{p-1}{6}\right) = -3\dfrac{(p-1)^2}{36} + \dfrac{(p-1)^2}{6} - 6 \geq 6. \end{cases}$$

Откуда:

$$\begin{cases} p > 1, \\ (p-13)(p+11) \geq 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$p \geq 13.$$

Ответ: 13.

4. Найти количество решений системы:

$$\begin{cases} a^{92} + b^{10} = 1, \\ a^{2024} + b^{2025} = 1. \end{cases}$$

Решение. Запишем систему в виде:

$$\begin{cases} (a^{46})^2 + (b^5)^2 = 1, \\ (a^{46})^{44} + (b^5)^{405} = 1. \end{cases}$$

Введем замену $x = a^{46}$, $y = b^5$, тогда последняя система примет вид:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x^{44} + y^{405} = 1. \end{cases} \qquad (1)$$

Из первого уравнения системы (1) получаем:

$$\begin{cases} |x| \leq 1, \\ |y| \leq 1. \end{cases} \qquad (2)$$

Из (2) следует, что если $0 < |x| < 1$, то

$$\begin{cases} x^{44} < x^2, \\ y^{405} \leq y^2. \end{cases} \qquad (3)$$

Сложив неравенства системы (3) с учётом (1), находим, что

$$x^{44} + y^{405} < x^2 + y^2 = 1.$$

Следовательно, система (1) может иметь решения только при $x = 0$, $x = 1$ или $x = -1$.

Если $x = 0$, из (1) $y = 1$. Если $x = 1$, из (1) $y = 0$. Если $x = -1$, из (1) $y = 0$.

Вернувшись к старым переменным, находим, что

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} a^{46}=0, \\ b^5=1, \end{cases} \\ \begin{cases} a^{46}=1, \\ b^5=0, \end{cases} \\ \begin{cases} a^{46}=-1, \\ b^5=0. \end{cases}\end{array}\right.$$

Следовательно,

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} a=0, \\ b=1, \end{cases} \\ \begin{cases} a=1, \\ b=0, \end{cases} \\ \begin{cases} a=-1, \\ b=0. \end{cases}\end{array}\right.$$

Тогда у системы три решения.

Ответ: 3.

5. Найти сумму всех целых значений x, при которых неравенство

$$(a+2)x^2-3(a+1)x-4a-2>0$$

выполнено при всех значениях a, удовлетворяющих условию $-3<a<1$.

Решение. Запишем неравенство в виде:

$$f(a)=(x^2-3x-4)a+2x^2-3x-2>0.$$

Так как $f(a)$ – линейная относительно a функция, а система

$$\begin{cases} f(-3)=0, \\ f(1)=0 \end{cases}$$

не имеет решений (см. ниже), то $f(a)$ будет положительна при всех значениях a, удовлетворяющих условию $-3<a<1$, тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} f(-3)\ge 0, \\ f(1)\ge 0. \end{cases}$$

Подставив $f(a)$, получим:

$$\begin{cases} -3(x^2-3x-4)+2x^2-3x-2\ge 0, \\ x^2-3x-4+2x^2-3x-2\ge 0. \end{cases}$$

Откуда:

$$\begin{cases} -x^2+6x+10\geq 0, \\ 3x^2-6x-6\geq 0. \end{cases}$$

Последнюю систему можно записать в виде:

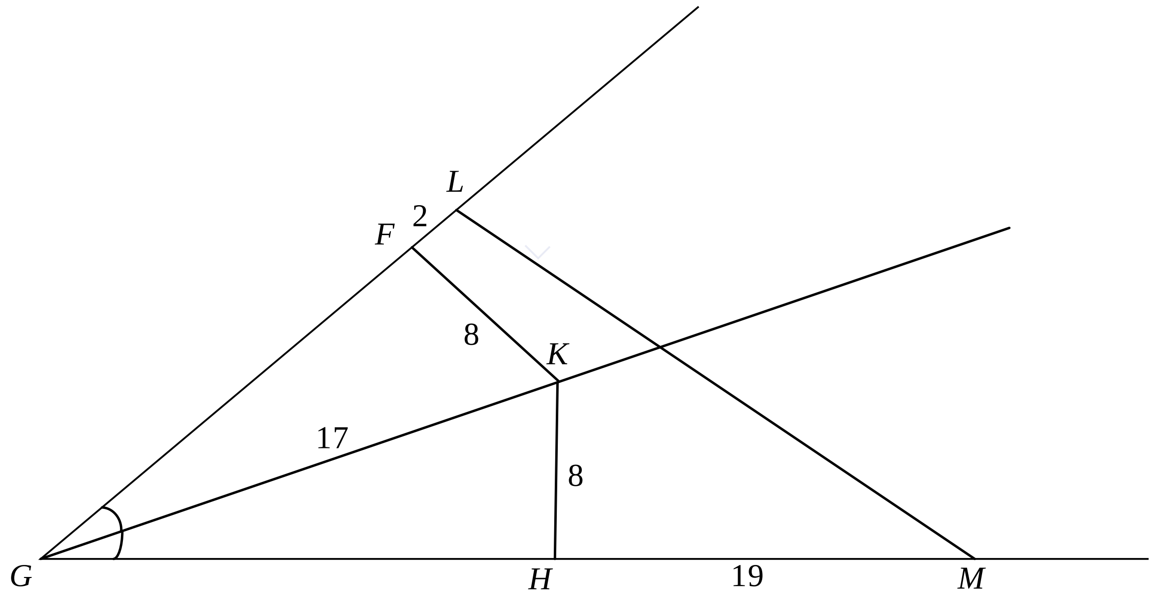
$$\begin{cases} -(x-(3+\sqrt{19}))(x-(3-\sqrt{19}))\geq 0, \\ 3(x-(1+\sqrt{3}))(x-(1-\sqrt{3}))\geq 0. \end{cases} \quad (1)$$

Так как $-2<3-\sqrt{19}<-1<1-\sqrt{3}<0$ и $2<\sqrt{3}+1<3<7<\sqrt{19}+3<8$, то решением системы (1) будут $x\in[3-\sqrt{19};1-\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3}+1;\sqrt{19}+3]$, а целыми решениями будут $-1;3;4;5;6;7$, и их сумма равна 24.

Ответ: 24.

6. Луч GK служит биссектрисой $\angle FGH$. Известно, что $KF\perp GF$, $KH\perp GH$, $KH=8, GK=17$. Отрезок GL содержит точку F и $FL=2$. Отрезок GM содержит точку H и $HM=19$. Найти ML^2.

Решение.



Прямоугольные треугольники GFK и KHG равны по острому углу и гипотенузе. Тогда:

$$FK=KH=8.$$

Из треугольника GFK:

$$GF=\sqrt{GK^2-FK^2}=\sqrt{17^2-8^2}=15,$$

$$\cos\angle FGK=\frac{GF}{GK}=\frac{15}{17}.$$

Из равенства треугольников GFK и KHG

$$GH = GF = 15,$$

$$\angle LGM = 2\angle FGK.$$

В треугольнике GLM:

$$GL = GF + FL = 15 + 2 = 17,$$

$$GM = GH + HM = 15 + 19 = 34,$$

$$\cos\angle LGM = \cos 2\angle FGK = 2\cos^2\angle FGK - 1 = 2\cdot\frac{15^2}{17^2} - 1 = \frac{161}{289}.$$

По теореме косинусов для треугольника GLM:

$$ML^2 = GL^2 + GM^2 - 2GL\cdot GM\cdot\cos\angle LGM =$$

$$= 17^2 + 34^2 - 2\cdot 17\cdot 34\cdot\frac{161}{289} = 289 + 1156 - 644 = 801.$$

Ответ: 801.

7. Вычислите коэффициент при x^{100} в многочлене

$$(1 + x + x^2 + \ldots + x^{2025})^3$$

после приведения подобных слагаемых.

Решение. Так как

$$(1 + x + x^2 + \ldots + x^{2025})^3 = (1 + x + \ldots + x^{2025})(1 + x + \ldots + x^{2025})(1 + x + \ldots + x^{2025}),$$

то после раскрытия скобок получаем слагаемые вида $x^p x^q x^r$, где p, q, r – целые числа, удовлетворяющие условию $0 \le p \le 2025$, $0 \le q \le 2025$, $0 \le r \le 2025$, причём коэффициент при $x^p x^q x^r$ равен 1. Выражение x^{100} будет получаться при условии, что $p + q + r = 100$. Следовательно, после приведения подобных слагаемых коэффициент при x^{100} будет равен числу целых неотрицательных решений уравнения

$$p + q + r = 100. \tag{1}$$

Найдём количество целых неотрицательных решений уравнения

$$a + b = n. \tag{2}$$

Из уравнения (2) следует, что $a \le n$. Каждому значению a от 0 до n соответствует единственное значение b, следовательно, уравнение (2) имеет $n+1$ целое неотрицательное решение.

При $p = 0$ уравнение (1) принимает вид

$$q + r = 100$$

и имеет 101 целое неотрицательное решение.

При $p=1$ уравнение (1) принимает вид

$$q+r=99$$

и имеет 100 целых неотрицательных решений.
При $p=2$ уравнение (1) принимает вид

$$q+r=98$$

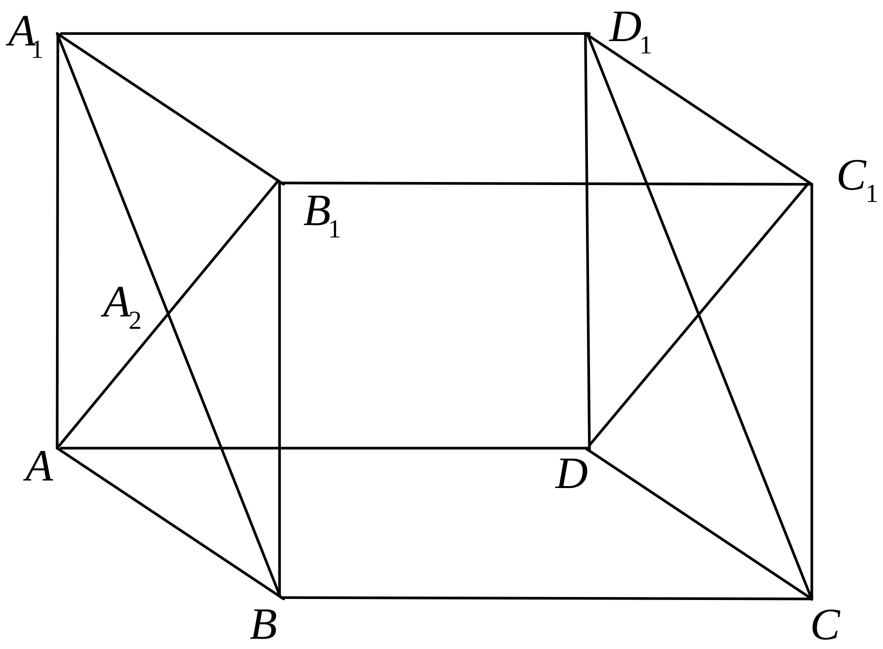
и имеет 99 целых неотрицательных решений.
Продолжая аналогичным образом, получаем, что при $p=100$ уравнение (1) принимает вид

$$q+r=0$$

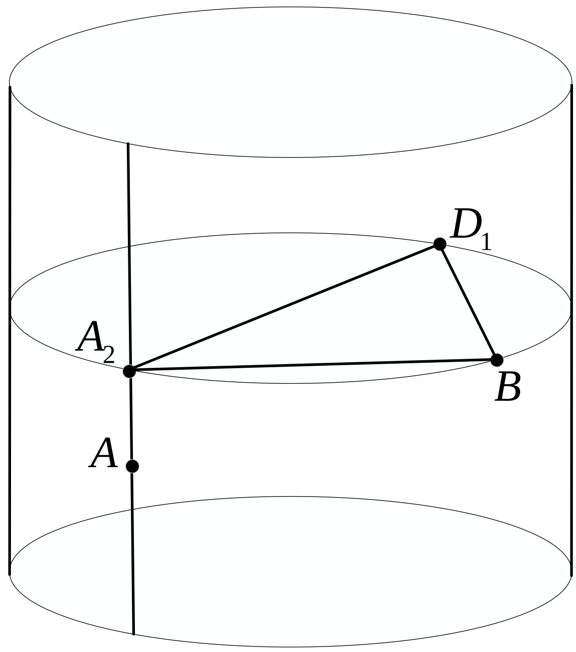
и имеет 1 целое неотрицательное решение.
Следовательно, уравнение (1) имеет

$$1+2+...+101=\frac{1+101}{2}\cdot 101=5151$$

целое неотрицательное решение.
Замечание. Количество целых неотрицательных решений уравнения (1) можно считать по урновой схеме или по формуле $\overline{C}_3^{100}$(число сочетаний с повторением из 3 по 100).
Ответ: 5151.
8. Вершины A, B и D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежат на боковой поверхности прямого цилиндра, ось которого параллельна прямой DC_1. Найти радиус основания цилиндра, если ребро куба имеет длину $a=2\sqrt{2}$.
Решение.



Так как $CD_1 \perp DC_1$ (как диагонали квадрата), $BC \perp DC_1$ (поскольку $BC \perp (DCC_1)$), то $(BCD_1) \perp DC_1$. Следовательно, ось цилиндра перпендикулярна (BCD_1). Поэтому если спроецировать боковую поверхность цилиндра на (BCD_1), то получим окружность, радиус которой R равен радиусу основания цилиндра.



Проекции точек B и D_1 на плоскость (BCD_1) совпадают с самими этими точками. Проекцией точки A на плоскость (BCD_1) будет точка пересечений диагоналей квадрата ABB_1A_1 – точка A_2, так как $AB_1 \parallel DC_1$.

Из куба находим, что

$$BA_2 = \frac{a\sqrt{2}}{2},\ BD_1 = a\sqrt{3},\ A_2D_1 = a\sqrt{\frac{3}{2}}\,. \qquad (1)$$

Поскольку $A_1D_1 \perp A_1B$, то из (1):

$$S\Delta A_2D_1B = \frac{BA_2 \cdot A_1D_1}{2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{4}\,. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) находим, что

$$R = \frac{BA_2 \cdot BD_1 \cdot A_2D_1}{4S\Delta A_2D_1B} = \frac{3a}{2\sqrt{2}} = 3\,.$$

Ответ: 3.