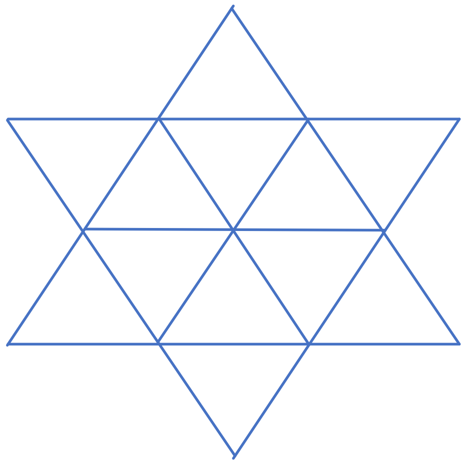
6-7 класс. Заочный (отборочный) тур

1. Сколько треугольников изображено на рисунке?



Решение. 12 маленьких треугольников; 6 треугольников, состоящих из четырех маленьких треугольников (по два на каждую диагональ шестиугольника); 2 треугольника, состоящих из девяти маленьких треугольников.

Значит, всего 12+6+2=20 треугольников.

Ответ: 20.

2. Имеются два числа: число $A=(3+2)\cdot(3^2+2^2)\cdot(3^4+2^4)\cdot(3^8+2^8)\cdot(3^{16}+2^{16})$ и число $B=(3+1)\cdot(3^2+1)\cdot(3^4+1)\cdot(3^8+1)\cdot(3^{16}+1)\cdot(3^{32}+1)$. Сравните эти числа. Если число A больше, то запишите в ответе 1, если число B больше, то запишите в ответе 2.

Решение. Так как

$$A=(3+2)\cdot(3^2+2^2)\cdot(3^4+2^4)\cdot(3^8+2^8)\cdot(3^{16}+2^{16})=$$
$$=(3-2)\cdot(3+2)\cdot(3^2+2^2)\cdot(3^4+2^4)\cdot(3^8+2^8)\cdot(3^{16}+2^{16})=$$
$$=(3^2-2^2)\cdot(3^2+2^2)\cdot(3^4+2^4)\cdot(3^8+2^8)\cdot(3^{16}+2^{16})=$$
$$=(3^4-2^4)\cdot(3^4+2^4)\cdot(3^8+2^8)\cdot(3^{16}+2^{16})=\ldots=3^{32}-2^{32},$$

$$B=(3+1)\cdot(3^2+1)\cdot(3^4+1)\cdot(3^8+1)\cdot(3^{16}+1)\cdot(3^{32}+1)=$$
$$=\frac{(3-1)\cdot(3+1)\cdot(3^2+1^2)\cdot(3^4+1^4)\cdot(3^8+1^8)\cdot(3^{16}+1^{16})\cdot(3^{32}+1^{32})}{2}=$$
$$=\frac{(3^2-1^2)\cdot(3^2+1^2)\cdot(3^4+1^4)\cdot(3^8+1^8)\cdot(3^{16}+1^{16})\cdot(3^{32}+1^{32})}{2}=$$
$$=\frac{(3^4-1^4)\cdot(3^4+1^4)\cdot(3^8+1^8)\cdot(3^{16}+1^{16})\cdot(3^{32}+1^{32})}{2}=\ldots=\frac{3^{64}-1}{2},$$

то

$$B-A=\frac{3^{64}-1-2\cdot 3^{32}+2\cdot 2^{32}}{2}=\frac{3^{32}\cdot(3^{32}-2)+2\cdot 2^{32}-1}{2}>0.$$

Значит, $B>A$.

Ответ: 2.

3. В каждом столбце прямоугольника числа размещены по определенной закономерности. Найдите произведение недостающих чисел.

	$\frac{5}{6}$	$\frac{16}{13}$	2	0	1,5
8		$\frac{14}{18}$	7	4	2
27	$\frac{7}{8}$		14	10	2,5
64	$\frac{8}{9}$	$\frac{10}{28}$		18	3
125	$\frac{9}{10}$	$\frac{8}{33}$	34		3,5
216	$\frac{10}{11}$	$\frac{6}{38}$	47	40	

Решение. Первый столбец: $1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, 6^3$. Второй столбец: $\frac{5}{6}, \frac{5+1}{6+1}, \frac{6+1}{7+1}, \frac{7+1}{8+1}, \frac{8+1}{9+1}, \frac{9+1}{10+1}$ (к числителю и знаменателю дроби добавляется единица). Третий столбец: $\frac{16}{13}, \frac{16-2}{13+5}, \frac{14-2}{18+5}, \frac{12-2}{23+5}, \frac{10-2}{28+5}, \frac{8-2}{33+5}$ (из числителя вычитается 2, к знаменателю добавляется 5). Четвертый столбец: $2^2-2, 3^2-2, 4^2-2, 5^2-2, 6^2-2, 7^2-2$ или $2, 2+5, 7+7, 14+9, 23+11, 34+13$. Пятый столбец: $0, 0+4, 4+6, 10+8, 18+10, 28+12$ (добавляется к первому элементу 4, ко второму – 6, к третьему – 8, к четвертому – 10, к пятому – 12). Шестой столбец: $1{,}5,\ 2,\ 2{,}5,\ 3,\ 3{,}5,\ 4$ (добавляется 0,5 к предыдущему числу). Получаем:

1	$\frac{5}{6}$	$\frac{16}{13}$	2	0	1,5
8	$\frac{6}{7}$	$\frac{14}{18}$	7	4	2
27	$\frac{7}{8}$	$\frac{12}{23}$	14	10	2,5
64	$\frac{8}{9}$	$\frac{10}{28}$	23	18	3
125	$\frac{9}{10}$	$\frac{8}{33}$	34	28	3,5
216	$\frac{10}{11}$	$\frac{6}{38}$	47	40	4

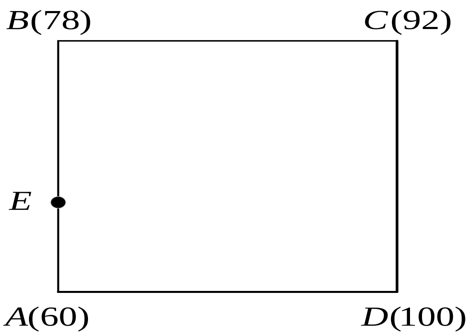
Итог: $1\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{12}{23}\cdot 23\cdot 28\cdot 4=1152$.

Ответ: 1152.

4. Парк имеет форму квадрата со стороной 1 километр. В углах парка построены дома, в которых живут 60, 78, 92 и 100 человек. Где по периметру парка нужно построить автобусную остановку, так чтобы суммарное расстояние, которое придётся пройти всем 330 жильцам этих домов до остановки, было наименьшим? Запишите в ответе это наименьшее расстояние. (Считайте, что все жильцы одного дома находятся на одинаковом расстоянии от остановки и жильцы могут двигаться только по периметру парка.)

Решение. Через A, B, C, D обозначим дома, в которых живет 60, 78, 92 и 100 человек соответственно. Остановку обозначим E. Суммарное расстояние, которое будут проходить 330 жильцов до остановки E, обозначим L. Для расположения остановки возможны четыре случая.

1 случай. Пусть $E\in AB$ и $AE=x,\ x\in[0,1]$.

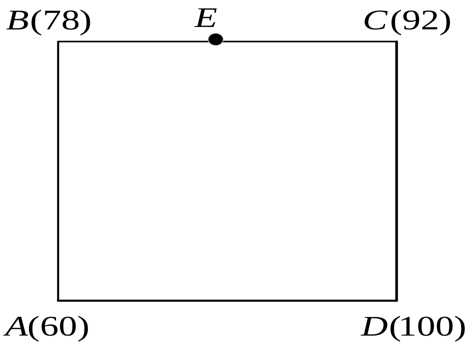


Для такого расположения остановки наименьшее L будет:

$$L(x)=60x+78(1-x)+92(2-x)+100(1+x)=362-10x.$$

Следовательно, $\min L(x)=L(1)=352$. Остановка должна быть у дома B.

2 случай. Пусть $E\in BC$ и $BE=x,\ x\in[0,1]$.

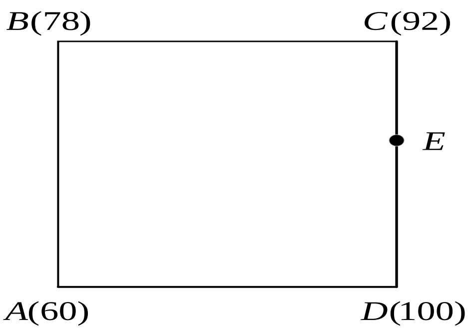


Для такого расположения остановки наименьшее L будет:

$$L(x)=60(1+x)+78x+92(1-x)+100(2-x)=352-54x.$$

Следовательно, $\min L(x)=L(1)=298$. Остановка должна быть у дома C.

3 случай. Пусть $E\in CD$ и $CE=x,\ x\in[0,1]$.

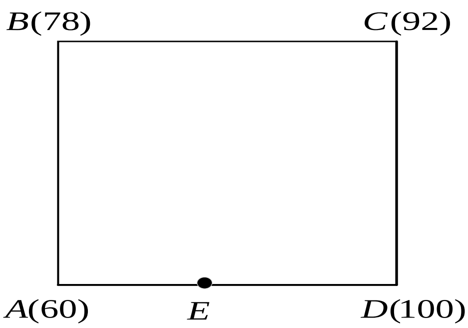


Для такого расположения остановки наименьшее L будет:

$$L(x)=60(2-x)+78(1+x)+92x+100(1-x)=298+10x.$$

Следовательно, $\min L(x)=L(0)=298$. Остановка должна быть у дома C.

4 случай. Пусть $E\in AD$ и $DE=x,\ x\in[0,1]$.



Для такого расположения остановки наименьшее L будет:

$$L(x)=60(1-x)+78(2-x)+92(1+x)+100x=308+54x.$$

Следовательно, $\min L(x)=L(0)=308$. Остановка должна быть у дома D.

Таким образом, наименьшее суммарное расстояние 298. Остановка должна быть у дома C.

Ответ: 298.

5. В двух цилиндрических баках вода находится на одном уровне (высота столба воды в двух баках совпадает). При открытии крана первый бак опустошается за 3 часа, а второй – за 1 час 30 минут. Одновременно открыли краны у обоих баков, а затем через некоторое время краны одновременно закрыли. Оказалось, что уровень воды в первом баке в два раза больше уровня воды во втором баке. Сколько времени были открыты краны? Ответ запишите в минутах. (Считайте, что скорость изменения уровня воды в каждом баке постоянна.)

Решение. Пусть V_1 – скорость изменения уровня воды в 1-м баке; V_2 – скорость изменения уровня воды во 2-м баке; l – начальный уровень воды в баках; t – время, которое баки были открыты.

Тогда:

$$\begin{cases} l = 3V_1, \\ l = \dfrac{3}{2}V_2, \\ \dfrac{l - tV_1}{l - tV_2} = 2. \end{cases} \tag{1}$$

Подставив представление l из первого и второго уравнения системы (1) в третье уравнение системы (1), получим:

$$\frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{3-t}{3/2-t} = 2. \tag{2}$$

Разделив первое уравнение системы (1) на второе уравнение системы (1), получим:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2}. \tag{3}$$

Подставив (3) в (2), получим:

$$\frac{3-t}{3/2-t} = 4.$$

Откуда $t = 1$ ч $= 60$ минут.

Ответ: 60.

6. Семья состоит из мужа, жены и их дочери-студентки. Если бы зарплата мужа увеличилась вчетверо, общий доход семьи вырос бы на 198 %. Если бы стипендия дочери уменьшилась бы вчетверо, общий доход семьи сократился бы на 3 %. Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата жены?

Решение. Пусть x – величина зарплаты мужа; y – величина зарплаты жены; z – величина стипендии дочери. По условию:

$$\begin{cases} 4x+y+z=2,98(x+y+z), \\ x+y+0,25z=0,97(x+y+z). \end{cases}$$

После приведения подобных слагаемых получим:

$$\begin{cases} 1,02x-1,98y-1,98z=0, \\ 0,03x+0,03y-0,72z=0. \end{cases} \qquad (1)$$

Из второго уравнения системы (1) получаем:

$$x=24z-y. \qquad (2)$$

Подставив (2) в первое уравнение системы (1), имеем:

$$24,48z-1,02y-1,98y-1,98z=0.$$

Откуда:

$$y=\frac{22,5z}{3}=7,5z. \qquad (3)$$

Из (2) и (3) получаем, что зарплата жены составляет:

$$\frac{y}{x+y+z}\cdot 100=\frac{7,5z}{24z+z}\cdot 100=7,5\cdot 4=30$$

процентов от дохода семьи.

Ответ: 30.

7. Простые числа p и q удовлетворяют соотношению:

$$(p-2)(p^2+2p+4)=29q^2+1.$$

Найти $p\cdot q$. Если таких пар p и q несколько, то напишите в ответе наибольшее значение $p\cdot q$.

Решение. Уравнение запишем в виде:

$$p^3-8=29q^2+1.$$

Откуда:

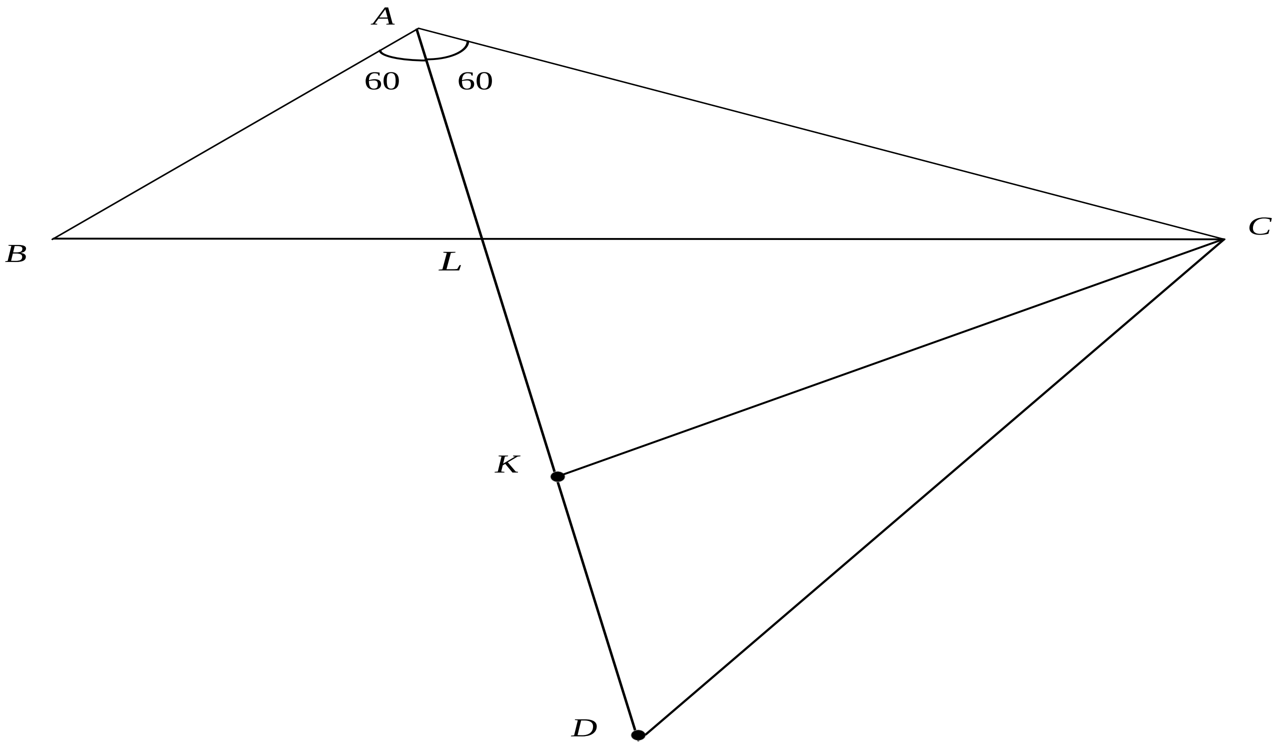
$$p^3 - 9 = 29q^2.$$

Из последнего равенства следует, что $p \geq 3$. Так как p – простое число, то p не кратно двум, тогда $p^3 - 9$ кратно двум. Из последнего равенства получаем, что q кратно 2. Так как q – простое число, то $q = 2$. Из уравнения находим, что $p^3 = 29 \cdot 4 + 9 = 125 = 5^3$. Значит, $p = 5$, а $p \cdot q = 5 \cdot 2 = 10$.

Ответ: 10.

8. В треугольнике ABC угол A равен 120°. На продолжении биссектрисы угла A взята точка D, такая что $AD = AB + AC$. Чему равен угол BCD?

Решение.



Так как

$$\angle ACL < 60 < 60 + \angle ABL = \angle ALC,$$

то

$$AC > AL.$$

Отложим $AK = AC$. Тогда:

$$DK = AB, \tag{1}$$

треугольник AKC равносторонний, а значит,

$$AC = KC, \tag{2}$$

$$\angle AKC = \angle KCA = 60^\circ. \tag{3}$$

Из (3) получаем, что

$$\angle BAC = 120^\circ = 180^\circ - \angle AKC = \angle DKC. \qquad (4)$$

Из (1), (2) и (4) следует, что $\Delta ABC = \Delta DKC$. Значит,

$$\angle ACB = \angle KCD. \qquad (5)$$

Из (5) получаем, что

$$60^\circ = \angle ACK = \angle ACB + \angle BCK = \angle KCD + \angle BCK = \angle BCD.$$

Ответ: 60°.

sladkihartem22*