8-9 класс. Заочный (отборочный) тур

1. Решить уравнение:

$$(x^2+x+1)^2 = x^2(3x^2+x+1).$$

В ответ запишите сумму корней уравнения.

Решение. Запишем уравнение в виде:

$$(x^2+x+1)^2 = 2x^4 + x^2(x^2+x+1). \qquad (1)$$

Проверкой убеждаемся, что $x=0$ не является решением. Тогда, разделив последнее уравнение на x^4, получим эквивалентное уравнение:

$$\left(\frac{x^2+x+1}{x^2}\right)^2 = 2 + \frac{x^2+x+1}{x^2}.$$

Введем замену $t = \dfrac{x^2+x+1}{x^2}$. Относительно t получаем уравнение:

$$t^2 - t - 2 = 0.$$

Решив его, находим:

$$\left[\begin{array}{l} t=-1, \\ t=2. \end{array}\right.$$

Вернувшись к старым переменным, получаем, что

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2+x+1}{x^2}=-1, \\ \dfrac{x^2+x+1}{x^2}=2. \end{array}\right.$$

Откуда:

$$\left[\begin{array}{l} 2x^2+x+1=0, \\ x^2-x-1=0. \end{array}\right.$$

Решив последнюю совокупность, находим, что

$$\left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \\ x_2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}. \end{array}\right.$$

Следовательно,

$$x_1+x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.$$

Ответ: 1.

2. Натуральные числа x и y удовлетворяют соотношению:

$$2^x+1=y^2.$$

Найти $x+y$. Если таких пар x и y несколько, то запишите в ответе наибольшее значение $x+y$.

Решение. Запишем уравнение в виде:

$$2^x=y^2-1=(y-1)(y+1). \qquad (1)$$

Из (1) и того, что x – натуральное число, следует, что y может принимать только значения $2;3;4,...$ и

$$\begin{cases} y-1=2^p, \\ y+1=2^n, \end{cases} \qquad (2)$$

где n, p – некоторые целые числа, такие что $n>p\ge 0$. Вычитая из второго уравнения системы (2) первое уравнение системы (2), получаем, что

$$2^n-2^p=2^p(2^{n-p}-1)=2. \qquad (3)$$

Из (3) находим, что

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2^p=2, \\ 2^{n-p}-1=1, \end{cases} \\ \begin{cases} 2^p=1, \\ 2^{n-p}-1=2, \end{cases} \end{array}\right.$$

откуда:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} p=1, \\ n=2, \end{cases} \\ \begin{cases} p=0, \\ n\notin \mathrm{N}. \end{cases} \end{array}\right.$$

С учётом (2) находим, что натуральным y, удовлетворяющим равенству (1), может быть только $y=3$. Подставив это значение в (1), находим, что $x=3$. Значит, $x+y=6$.

Ответ: 6.

3. При каком значении параметра a многочлен

$$9x^2+12(a-1)x+2a^3+3a^2-8a+3$$

можно представить в виде полного квадрата?

Решение. Запишем многочлен в следующем виде:

$$9x^2+12(a-1)x+2a^3+3a^2-8a+3=(3x)^2+2\cdot 3x\cdot 2(a-1)+(2(a-1))^2-$$
$$-4a^2+8a-4+2a^3+3a^2-8a+3=(3x+2(a-1))^2+2a^3-a^2-1.$$

Следовательно, нужно, чтобы a было корнем уравнения

$$2a^3-a^2-1=0.$$

Так как

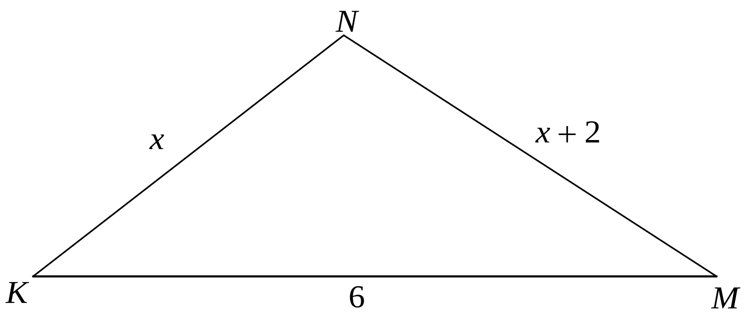
$$2a^3-a^2-1=(a-1)(2a^2+a+1),$$

то получаем, что $a-1=0$ или $2a^2+a+1=0$. Из первого уравнения находим, что $a=1$, второе уравнение не имеет решений (дискриминант отрицательный, или можно выделить полный квадрат).

Ответ: 1.

4. В треугольнике KMN $KM=6$, $MN-KN=2$, $\cos\angle KMN=\dfrac{3}{5}$. Найти площадь треугольника KMN.

Решение.



По теореме косинусов:

$$KN^2=KM^2+NM^2-2KM\cdot NM\cdot\cos\angle KMN. \qquad (1)$$

Пусть $KN=x$, тогда $NM=x+2$ и (1) примет вид:

$$x^2=(x+2)^2+6^2-2\cdot 6\cdot(x+2)\cdot\frac{3}{5}.$$

После приведения подобных слагаемых получаем:

$$16x=128.$$

Следовательно,

$$KN=8,\ NM=10.$$

По формуле Герона находим:

$$S_{\Delta KMN}=\sqrt{12\cdot(12-6)\cdot(12-8)\cdot(12-10)}=24.$$

Ответ: 24.

5. Найти количество решений в натуральный числах уравнения

$$x+2y+z=2025.$$

Решение. Найдём количество решений в натуральных числах уравнения

$$a+b=n. \tag{1}$$

Из уравнения (1) следует, что $a \le n-1$. Каждому значению a от 1 до $n-1$ соответствует единственное значение b, следовательно, уравнение (1) имеет $n-1$ решение в натуральных числах.

При $y=1$ исходное уравнение принимает вид

$$x+z=2023$$

и имеет 2022 решения в натуральных числах.

При $y=2$ исходное уравнение принимает вид

$$x+z=2021$$

и имеет 2020 решений в натуральных числах.

При $y=3$ исходное уравнение принимает вид

$$x+z=2019$$

и имеет 2018 решений в натуральных числах.

Продолжая аналогичным образом, получаем, что при $y=1011$ исходное уравнение принимает вид

$$x+z=3$$

и имеет 2 решения в натуральных числах.

При $y=1012$ исходное уравнение принимает вид

$$x+z=1$$

и не имеет решений в натуральных числах.

Следовательно, исходное уравнение будет иметь

$$2+4+6+...+2020+2022=\frac{2+2022}{2}\cdot 1011=1023132$$

решения в натуральных числах.

Ответ: 1023132.

6. Из порта в море одним и тем же курсом вышли два корабля, идущие с одной и той же скоростью. Со второго корабля, идущего сзади, отправляется быстроходный катер, который догоняет первый корабль и сразу же возвращается на свой корабль. Катер находится в пути 13 часов 20 минут. Если бы перед выходом катера оба корабля одновременно уменьшили скорость на 10 километров в час, то катер находился бы в пути 11 часов 40 минут, а если бы перед выходом катера оба корабля одновременно увеличили скорость на 10 километров в час, то катер находился бы в пути 17 часов 30 минут. На сколько часов раньше второго вышел из порта первый корабль? (Считайте, что в море отсутствует течение и скорость катера постоянна.)

Решение. Пусть S – расстояние между кораблями в момент времени, когда со второго корабля стартовал катер (так как скорости кораблей равны, то начиная с момента времени, когда из порта выйдет второй катер, расстояние между кораблями всегда будет равно S); u – первоначальная скорость кораблей; v – скорость катера. По условию, $v > u$. Тогда, по условию:

$$\begin{cases} \dfrac{S}{v-u} + \dfrac{S}{v+u} = \dfrac{40}{3}, \\ \dfrac{S}{v-u+10} + \dfrac{S}{v+u-10} = \dfrac{35}{3}, \\ \dfrac{S}{v-u-10} + \dfrac{S}{v+u+10} = \dfrac{35}{2}. \end{cases} \qquad (1)$$

Приведя дроби в левой части уравнений системы (1) к общему знаменателю, умножив второе и третье уравнения системы (1) соответственно на $3(v-(u-10))(v+(u-10))$ и $2(v-(u+10))(v+(u+10))$, получим:

$$\begin{cases} \dfrac{2vS}{v^2-u^2} = \dfrac{40}{3}, \\ 6vS = 35(v^2-(u-10)^2), \\ 4vS = 35(v^2-(u+10)^2). \end{cases} \qquad (2)$$

Вычитая из второго уравнения системы (2) третье уравнение системы (2), получим:

$$2vS = 1400u. \qquad (3)$$

Подставив это представление в первое и второе уравнения системы (2), находим, что

$$\begin{cases} 3\cdot 1400u = 40(v^2-u^2), \\ 3\cdot 1400u = 35(v^2-(u-10)^2). \end{cases}$$

После сокращения на 40 в первом уравнении и на 35 во втором уравнении последней системы получаем:

$$\begin{cases} 105u = v^2 - u^2, \\ 120u = v^2 - u^2 + 20u - 100. \end{cases} \qquad (4)$$

Вычитая из первого уравнения системы (4) второе уравнение системы (4), получаем:

$$u = 20.$$

Подставив это значение в первое уравнение системы (4), находим, что

$$v = 50. \qquad (5)$$

Из (3) и (5) получаем, что первый корабль вышел из порта раньше второго на

$$\frac{S}{u} = \frac{1400}{2v} = 14$$

часов.

Ответ: 14.

7. Попарно различные числа x, y, z, k таковы, что

$$\frac{x+z+3}{x+k+3} = \frac{y+k+5}{y+z+5}.$$

Чему может быть равно $x + y + z + k$?

Решение. Запишем соотношение в виде:

$$\frac{x+3+z}{x+3+k} = \frac{y+5+k}{y+5+z}.$$

Введем обозначения $x+3=a,\ y+5=b,\ z=c,\ k=d$. Тогда $c \neq d$ и

$$\frac{a+c}{a+d} = \frac{b+d}{b+c}. \qquad (1)$$

Из (1) получаем следующие эквивалентные соотношения:

$$(a+c)(b+c) = (a+d)(b+d),$$

$$ab + ac + bc + c^2 = ab + ad + bd + d^2,$$

$$ac - ad + bc - bd + c^2 - d^2 = 0,$$

$$a(c-d) + b(c-d) + (c-d)(c+d) = 0,$$

$$(c-d)(a+b+c+d) = 0. \qquad (2)$$

Так как $c \neq d$, то из (2) получаем, что

$$a + b + c + d = 0. \quad (3)$$

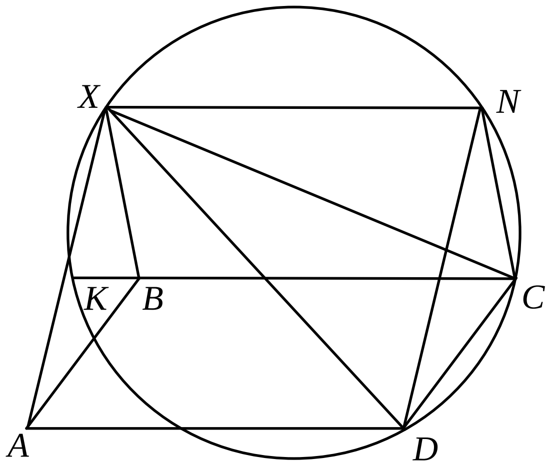
Из (3) и введенных обозначений получаем, что

$$x + y + z + k = a - 3 + b - 5 + c + d = a + b + c + d - 8 = -8.$$

Ответ: -8.

8. Вне параллелограмма $ABCD$ взята точка X, таким образом что $\angle XBC = 100^\circ$, а $\angle XAB = \angle XCB$. Найдите $\angle XDC$.

Решение.



Около треугольника XDC опишем окружность. Пусть прямая BC пересекает эту окружность в точках C и K. Проведем хорду XN параллельно BC. Так как $XN \parallel BC$, то $\cup XK = \cup CN$ (дуги между параллельными прямыми равны). Тогда

$$\angle XAB = \angle XCK = \frac{\cup XK}{2} = \frac{\cup CN}{2} = \angle NDC. \quad (1)$$

Из (1) и того, что $AB \parallel DC$, следует, что $AX \parallel DN$. Поскольку $XN \parallel BC \parallel AD$, то $AXND$ параллелограмм. Значит,

$$XN = AD = BC. \quad (2)$$

Из (2) и того, что $XN \parallel BC$, следует, что $BXNC$ параллелограмм. Тогда

$$\angle XNC = \angle XBC = 100^\circ. \quad (3)$$

Поскольку четырёхугольник $XNCD$ вписанный, то из (3) получаем, что

$$\angle XDC = 180^\circ - \angle XNC = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ.$$

Ответ: 80°.