10-11 класс.Очный тур. 1 вариант

1.Найти a при которых уравнение

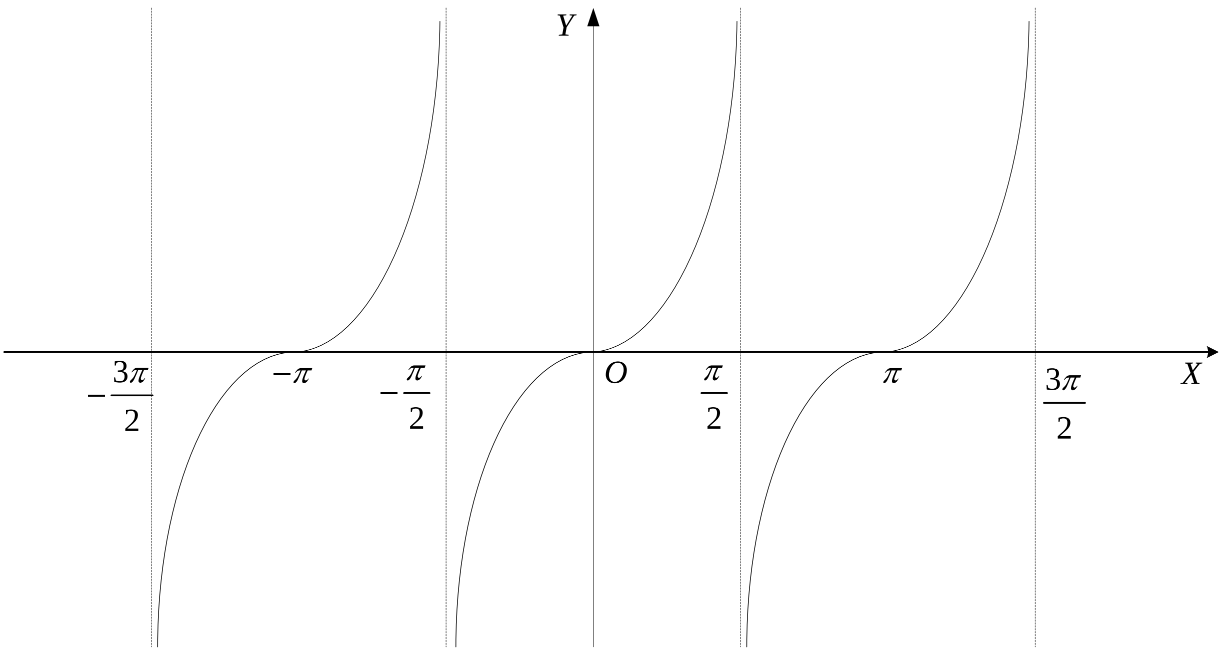
$$x^3-9x^2+108+(a^2-108a)tgx=a$$

имеет ровно два различных решения.

Решение. Пусть $f(x)=x^3-9x^2+108-a$, $g(x)=-(a^2-108a)tgx$, тогда уравнение запишется в виде:

$$f(x)=g(x).$$

Так как $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, а $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, то если $a\neq 0$ и $a\neq 108$, уравнение имеет бесконечно много решений (рисунок для случая $-(a^2-108a)>0$).



Тогда два решения могут быть только при $a=0$ или $a=108$.

Если $a=0$, то уравнение примет вид:

$$x^3-9x^2+108=0.$$

Его можно записать в виде:

$$(x-6)^2(x+3)=0,$$

откуда:

$$\left[\begin{array}{l} x=6, \\ x=-3. \end{array}\right.$$

Значит, $a=0$ подходит.

Если $a=108$, то уравнение примет вид:

$$x^3 - 9x^2 = 0.$$

Его можно записать в виде:

$$x^2(x-9) = 0,$$

откуда:

$$\left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 9. \end{array}\right.$$

Значит, $a = 108$ подходит.

Ответ: $0;108$.

2. Найти не менее 2025 натуральных решений уравнения

$$3x^2 + y^3 = 7z^4.$$

Решение. Будем искать решение в виде $x = a \cdot k^6$, $y = b \cdot k^4$, где $a,b,k \in \mathbb{N}$. Тогда уравнение примет вид:

$$(3a^2 + b^3) \cdot k^{12} = 7z^4.$$

Взяв в последнем равенстве $a = 4,\ b = 4$, получаем, что

$$112k^{12} = 7z^4,$$

Откуда:

$$z = 2k^3.$$

Таким образом, при любом натуральном k решениями уравнения будут

$$x = 4k^6,\ y = 4k^4,\ z = 2k^3.$$

3. Доказать, что если A, B, C – углы треугольника, то

$$\sin(A/2)\sin(B/2)\sin(C/2) \le \frac{1}{8}.$$

Решение. Из формулы преобразования произведения в сумму получаем, что

$$\sin(A/2)\sin(B/2) = \frac{1}{2}(\cos(A/2 - B/2) - \cos(A/2 + B/2)). \qquad (1)$$

Так как $A + B + C = \pi$, то $C/2 = \pi/2 - A/2 - B/2$, тогда

$$\sin(C/2) = \sin(\pi/2 - A/2 - B/2) = \cos(A/2 + B/2). \qquad (2)$$

С учётом (1) и (2) получаем:

$$\sin(A/2)\sin(B/2)\sin(C/2) =$$

$$= \frac{1}{2}(\cos(A/2 - B/2) - \cos(A/2 + B/2)) \cdot \cos(A/2 + B/2)) =$$

$$= \frac{1}{2}(\cos(A/2 - B/2)\cos(A/2 + B/2) - \cos^2(A/2 + B/2) -$$

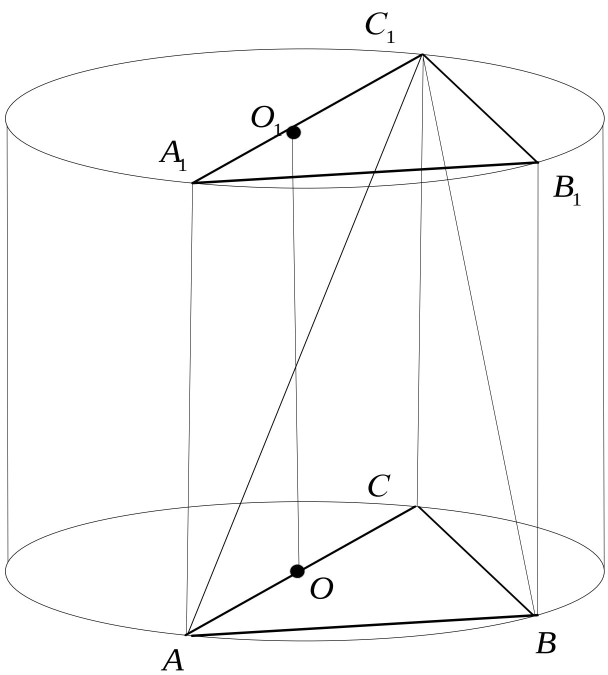
$$- \frac{1}{4}\cos^2(A/2 - B/2) + \frac{1}{4}\cos^2(A/2 - B/2)) =$$

$$= -\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\cos(A/2 - B/2) - \cos(A/2 + B/2))^2 + \frac{1}{8}\cos^2(A/2 - B/2) \le$$

$$\le \frac{1}{8}\cos^2(A/2 - B/2)) \le \frac{1}{8}.$$

4. В прямом цилиндре на окружности одного из его оснований взяли точки A и B, на окружности другого основания взяли точки B_1 и C_1, так что BB_1 – образующая цилиндра, а отрезок AC_1 пересекает его ось. Найдите расстояние от точки B до прямой AC_1, если $BB_1 = 12$, $AB = 21$ и $B_1C_1 = 16$.

Решение.



Пусть OO_1 – ось цилиндра. Так как AC_1 пересекается с OO_1, то они лежат на осевом сечении AA_1C_1C. Тогда AC – диаметр нижнего основания, и получаем, что

$$\angle ABC = 90^\circ. \tag{1}$$

Поскольку BC – проекция BC_1 на (ABC), то из (1) и теоремы о трёх перпендикулярах получаем, что

$$\angle ABC_1 = 90^\circ. \qquad (2)$$

Так как BB_1C_1C – прямоугольник, то

$$BC = B_1C_1 = 16. \qquad (3)$$

Поскольку длины образующих цилиндра равны, то

$$CC_1 = BB_1 = 12. \qquad (4)$$

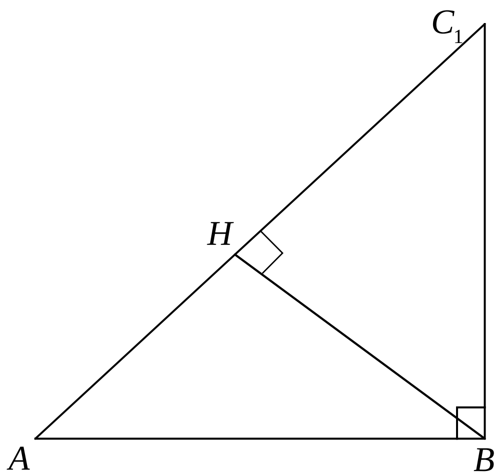
Из (3), (4) и теоремы Пифагора получаем, что

$$BC_1 = \sqrt{BC^2 + CC_1^{\,2}} = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20. \qquad (5)$$

Из (2), (5) и теоремы Пифагора получаем, что

$$AC_1 = \sqrt{AB^2 + BC_1^{\,2}} = \sqrt{21^2 + 20^2} = 29. \qquad (6)$$

Пусть H – основание перпендикуляра, опущенного из точки B на прямую AC_1 ,тогда BH – искомое расстояние.



Из ΔABC_1:

$$\frac{AB \cdot BC_1}{2} = S\Delta ABC_1 = \frac{AC_1 \cdot BH}{2}. \qquad (7)$$

Из (5), (6) и (7) находим, что

$$BH = \frac{AB \cdot BC_1}{AC_1} = \frac{21 \cdot 20}{29} = \frac{420}{29}.$$

Ответ: $\frac{420}{29} = 14\frac{14}{29}$.

5. Есть некоторое натуральное число k большее 7. В телеигре «Форд Боярд» старец Фура предлагает сыграть участнику в следующую игру. Сначала случайным образом выбирается натуральное число n, большее ста. Затем на стол в ряд выкладывается n палочек. Старец Фура и участник игры по очереди берут от одной до k палочек. Первым берёт палочки участник игры. Проигрывает тот, кто взял последнюю палочку. Для любого числа n существует стратегия, гарантирующая выигрыш старца Фура или участника игры. Для всех возможных значений n описать выигрышную стратегию. Найти вероятность того, что выиграет участник игры.

Решение. Число n при делении на $k+1$может давать в остатке любое число от 0 до k. Если остаток от деления n на $k+1$ равен 1, то выиграет старец Фура. Для этого после каждого хода участника игры ему нужно брать столько палочек, чтобы в сумме с палочками, которые перед этим взял участник игры,получалось число $k+1$. Это всегда можно сделать если перед ходом игрока на столе не одна палочка (если на столе одна палочка, то выиграет старец Фура). Тогда после каждого хода старца Фура будет оставаться количество палочек, которое при делении на $k+1$ даёт в остатке 1. Значит, последняя палочка достанется участнику игры.

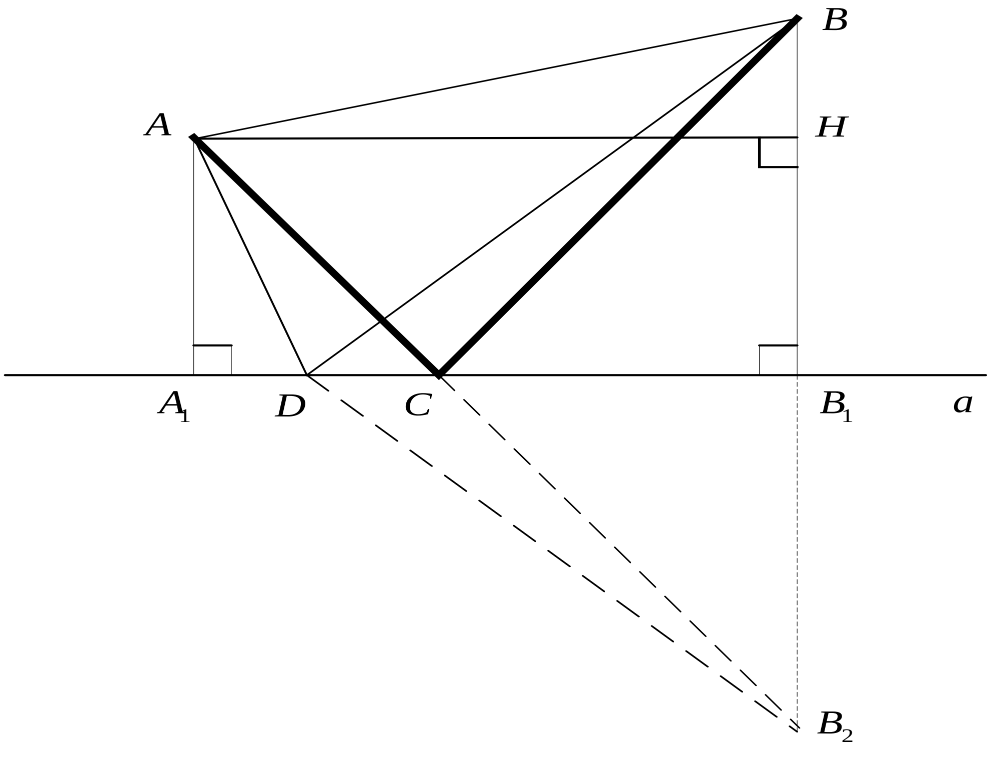
Если остаток от деления n на $k+1$ будет число $r \neq 1$, то выиграет участник. Для этого первым ходом ему нужно взять столько палочек, чтобы на столе осталось количество палочек, которое при делении на $k+1$ даёт в остатке 1 (при $r=0$ нужно взять k палочек, при $r=2,3,4,...,k$ нужно взять $r-1$ палочку). Затем после каждого хода старца Фура участнику игры нужно брать столько палочек, чтобы в сумме с палочками, которые перед этим взял старец Фура, получалось число $k+1$. Это всегда можно сделать если перед ходом старца Фура на столе не одна палочка (если на столе одна палочка, то выиграет участник игры). Тогда после каждого хода участника игрыбудет оставаться количество палочек, которое при делении на $k+1$ даёт в остатке 1. Значит, последняя палочка достанется старцу Фура.

Вероятность выигрыша игрока будет $\frac{k}{k+1}$.

Ответ: $\frac{k}{k+1}$.

6. По одну сторону реки в своих домиках живут Лёлек и Болек, русло реки прямое. Домик Лёлека и домик Болека находятся на расстоянии 12 и 18 метров от русла реки соответственно, расстояние между домиками – 50 метров. Болек затеял готовить обед, но у ребят отключили воду. Он позвонилЛёлеку и попросил его принести ведро воды из речки. Опишите, какой маршрут должен избрать Лёлек (по какой траектории двигаться и где зачерпнуть воду), чтобы длина его маршрута была наименьшей. Найдите наименьшую длину маршрута Лёлека. (Обязательно обоснуйте ответ.)

Решение. Так как кратчайшее расстояние между двумя точками плоскости – это отрезок, их соединяющий, то Лёлек должен двигаться по ломаной (из неравенства треугольника). Поскольку длина ломаной больше или равна длине отрезка, соединяющего начало и конец ломаной (из неравенства треугольника), то Лёлек должен двигаться по ломаной, состоящей из двух звеньев: первое звено – от его домика до некоторой точки на реке, второе звено– от этой точки на реке до домика Болека. Пусть прямая a – река; A – домик Лёлека; B – домик Болека; A_1 и B_1 – основания перпендикуляров, опущенных из точек A и B на прямую a; B_2 – точка, симметричная точке B относительно прямой a; C – точка пересечения отрезка A_1B_1 и AB_2; D – произвольная точка на прямой a, отличная от точки C.



Кратчайший путь будет по ломаной ACB. Докажем это.

Прямоугольные треугольники CBB_1 и CB_1B_2, а также прямоугольные треугольники DBB_1 и DB_1B_2 равны по двум катетам. Следовательно,

$$CB = CB_2. \tag{1}$$

$$DB = DB_2. \tag{2}$$

Рассмотрим треугольник ADB_2. Из (1), (2) и неравенства треугольника получаем:

$$AC + CB = AC + CB_2 = AB_2 < AD + DB_2 = AD + DB. \tag{3}$$

Из прямоугольных треугольников AHB и AHB_2 получаем, что

$$\begin{aligned} AB_2^{\,2} &= (B_1B_2 + B_1H)^2 + AH^2 = (BB_1 + AA_1)^2 + AB^2 - BH^2 = \\ &= (BB_1 + AA_1)^2 + AB^2 - (BB_1 - AA_1)^2 = AB^2 + 4 \cdot BB_1 \cdot AA_1 = \\ &= 2500 + 4 \cdot 18 \cdot 12 = 2500 + 864 = 3364 = 58^2. \end{aligned} \tag{4}$$

Из (3) и (4) получаем, что наименьшее расстояние, которое пройдёт Лёлек, будет 58.

Ответ: 58.