6-7 класс.Очный тур. 1 вариант

1.Сумма двух натуральных чисел равна 2025. Если в одном из них зачеркнуть справа одну цифру, то получится второе число. Найти все такие числа.

Решение. Пусть A – большее число; B – меньшее число; c – цифра, которую зачеркнули в записи числа A. Тогда $A=10B+c$, и получаем уравнение:

$$2025 = A+B = 10B+c+B = 11B+c. \qquad (1)$$

Так как c – цифра, то, полагая в (1) $c=0$, $c=1,\ldots$, $c=9$, находим, что решением (1) будут только $c=1$, $B=184$. Значит, $A=1841$.

Ответ: 184, 1841.

2. Числа a, b и c таковы, что $ab+c^2=0$ и $a+b=9$. Найти значение выражения:

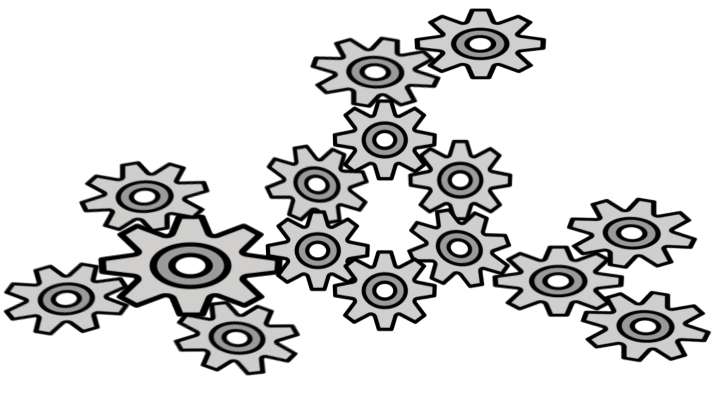
$$(a+c)(b+c)+(a-c)(b-c)+(a+1)(b+1)-(a-1)(b-1).$$

Решение.

$$(a+c)(b+c)+(a-c)(b-c)+(a+1)(b+1)-(a-1)(b-1)=$$
$$=ab+ac+bc+c^2+ab-ac-bc+c^2+ab+b+a+1-ab+b+a-1=$$
$$=2ab+2c^2+2a+2b=18.$$

Ответ: 18.

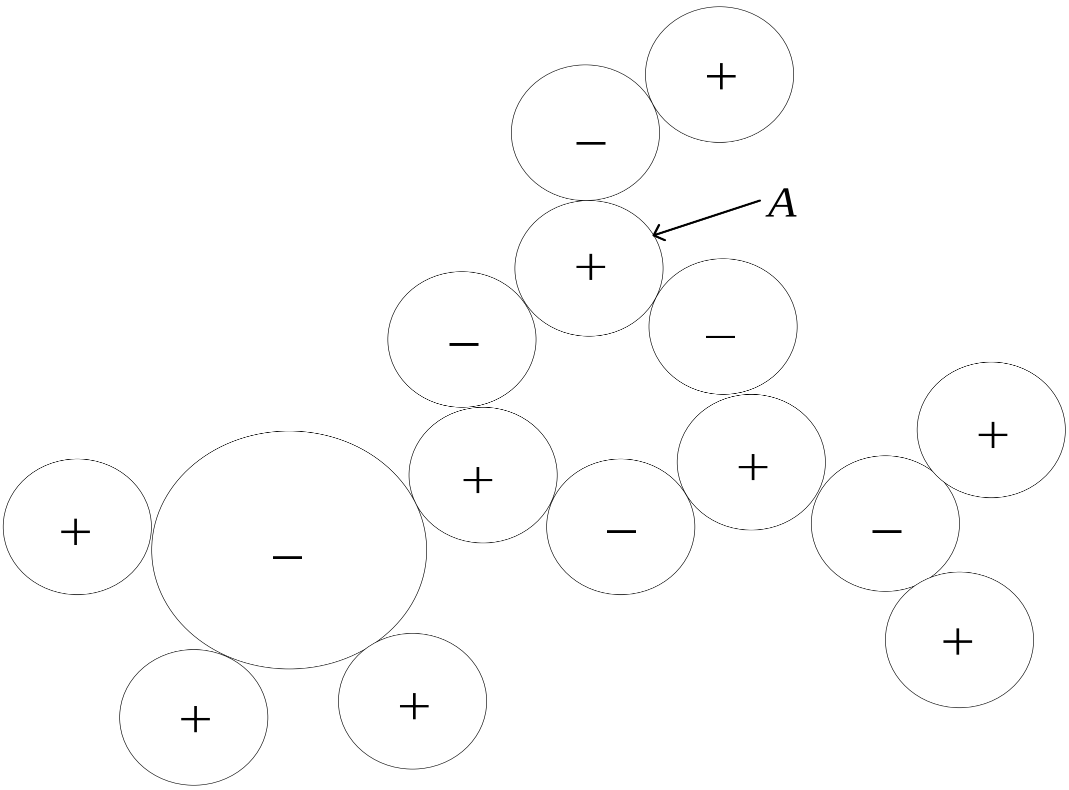
3. У Васи есть механизм из шестерёнок (смотри рисунок). Каждая шестерёнка закреплена и может вращаться как по часовой, так и против часовой стрелки. При движении любой шестерёнки в действие приводится весь шестерёночный механизм. Васе стало интересно, какое наибольшее количество шестерёнок в его механизме может вращаться по часовой стрелке. Недолго думая, он начал по очереди вращать каждую шестерёнку по часовой и против часовой стрелки и подсчитывать количество шестерёнок в механизме, которые вращаются по часовой стрелке. В результате Вася получил интересующее его число. Подумайте и найдите, какое число получил Вася. (Обязательно обоснуйте ответ. При обосновании можете изображать шестерёнки кружками.)



Решение. Если шестерёночный механизм движется, то две соприкасающиеся шестеренки обязательно движутся в противоположном направлении. При движении шестерёночного механизма любая фиксированная шестерёнка вращается либо по часовой, либо против часовой стрелки. Вращение любой фиксированной шестерёнки полностью определяет вращение всего механизма.

Знаком «+» будем обозначать шестерёнку, вращающуюся по часовой стрелке, а знаком «-» будем обозначать шестерёнку, вращающуюся против часовой стрелки. Зафиксируем одну из шестерёнок, например A (см. рисунок).

Вращая по часовой стрелке шестерёнку A, получим 9 шестерёнок, вращающихся по часовой стрелке, и 6 шестерёнок, вращающихся против часовой стрелки.



Вращая против часовой стрелки шестерёнку A, получим 6 шестерёнок, вращающихся по часовой стрелке, и 9 шестерёнок, вращающихся против часовой стрелки(те шестерёнки, которые в предыдущем случае вращались по часовой стрелке, будут вращаться против часовой стрелки, а которые вращались против часовой стрелки, будут вращаться по часовой стрелке).

Ответ: 9.

4. Доказать, что для всех натуральных n число $n^4+6n^3+5n^2+12$ делится без остатка на 4.

Решение. Преобразуем выражение:

$$n^4+6n^3+5n^2+12=n^4+2n^3+n^2+4n^3+4n^2+12=n^2(n^2+2n+1)+$$
$$+4(n^3+n^2+3)=(n(n+1))^2+4(n^3+n^2+3).$$

Так как из двух последовательных натуральных чисел одно обязательно чётно, то $(n(n+1))^2$ делится на 4.Из последнего равенства получаем, что $n^4+6n^3+5n^2+12$ делится на 4.

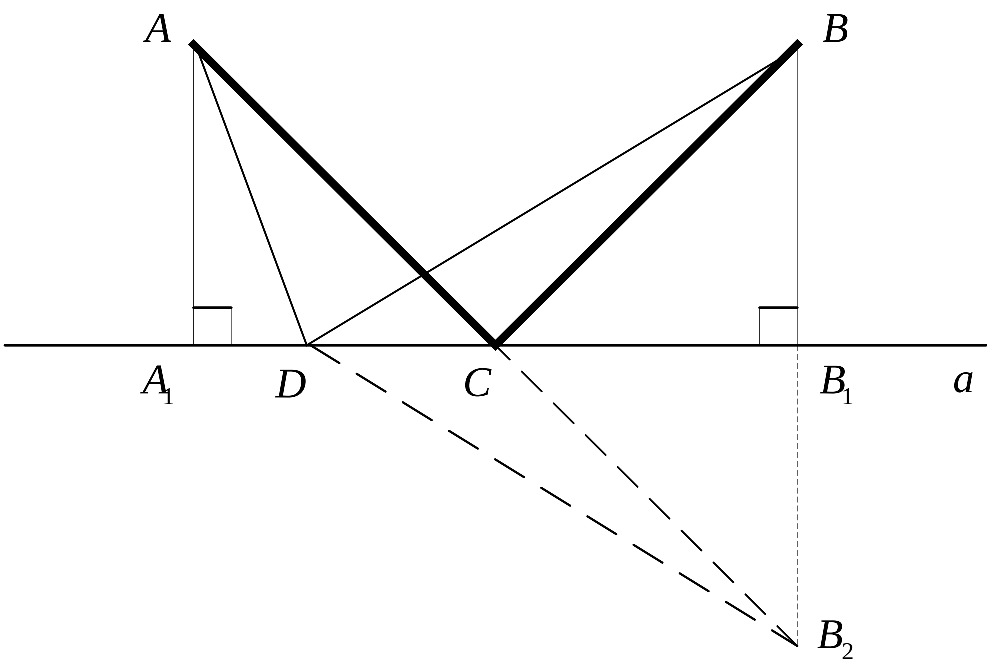
5.В телеигре «Форд Боярд» старец Фура предлагает сыграть участнику в следующую игру. На столе в ряд лежит 21 палочка. Старец Фура и участник игры по очереди берут от одной до четырех палочек. Проигрывает тот, кто взял последнюю палочку. Если первым берёт палочки участник игры, то кто выиграет при выборе правильной стратегии –он или старец Фура? (Опишите и обоснуйте выигрышную стратегию.)

Решение. Число 21 при делении на 5 даёт в остатке 1. После каждого хода участника игры старец Фура должен брать столько палочек, чтобы в сумме с палочками, которые взял перед этим участник игры,получилось число 5. Это всегда можно сделать если перед ходом участника игры на столе не одна палочка (если на столе одна палочка, то выигрывает старец Фура). Тогда после каждого хода старца Фура на столе будет оставаться количество палочек, которое при делении на 5 даёт в остатке 1. Значит, последняя палочка достанется участнику игры.

Ответ: выиграет старец Фура.

6.По одну сторону реки в своих домиках живут Лёлек и Болек, русло реки прямое. Домик Лёлека и домик Болека находятся на расстоянии 50 метров от русла реки, расстояние между домиками –100 метров. Болек затеял готовить обед, но у ребят отключили воду. Он позвонилЛёлеку и попросил его принести ведро воды из речки. Опишите, какой маршрут должен избрать Лёлек (по какой траектории двигаться и где зачерпнуть воду), чтобы длина его маршрута была наименьшей. (Обязательно обоснуйте ответ.)

Решение. Так как кратчайшее расстояние между двумя точками плоскости – это отрезок, их соединяющий, то Лёлек должен двигаться по ломаной (из неравенства треугольника). Поскольку длина ломаной больше или равна длине отрезка, соединяющего начало и конец ломаной (из неравенства треугольника), то Лёлек должен двигаться по ломаной, состоящей из двух звеньев: первое звено – от его домика до некоторой точки на реке, второе звено– от этой точки на реке до домика Болека. Пусть прямая a – река; A – домик Лёлека; B – домик Болека; A_1 и B_1 – основания перпендикуляров, опущенных из точек A и B на прямую a; B_2 – точка, симметричная точке B относительно прямой a; C – середина отрезка A_1B_1; D – произвольная точка на прямой a, отличная от C.



Кратчайший путь будет по ломаной ACB. Докажем это.

Прямоугольные треугольники CBB_1, CB_1B_2 и AA_1C, а также прямоугольные треугольники DBB_1 и DB_1B_2 равны по двум катетам. Следовательно,

$$CB = CB_2. \tag{1}$$

$$DB = DB_2. \tag{2}$$

Из равенства треугольников CB_1B_2 и AA_1C следует, что точки A, C и B_2 лежат на одной прямой.

Рассмотрим треугольник ADB_2. Из (1), (2) и неравенства треугольника получаем:

$$AC + CB = AC + CB_2 = AB_2 < AD + DB_2 = AD + DB.$$