8-9 класс.Очный тур. 1 вариант

1. При каких значениях параметра a уравнение

$$\frac{x^2+ax-2a^2}{x-1}=0$$

имеет ровно одно решение?

Решение. Запишем уравнение в виде:

$$\frac{(x-a)(x+2a)}{x-1}=0,$$

откуда:

$$\begin{cases} x \neq 1, \\ \left[\begin{array}{l} x_1 = a, \\ x_2 = -2a. \end{array}\right. \end{cases}$$

Следовательно, одно решение будет, когда $x_1 = x_2$ и они подходят по ОДЗ ($x_1 \neq 1$) или когда $x_1 \neq x_2$ и только один корень подходит по ОДЗ ($x_1 = 1,\ x_2 \neq 1$ или $x_1 \neq 1,\ x_2 = 1$). Тогда получаем, что $a=0,\ a=1,\ a=-\frac{1}{2}$ (можно решать в плоскости AOX).

Ответ: $a=0,\ a=1,\ a=-\frac{1}{2}$.

2. Найти не менее 2025 пар целых чисел x и y, для которых выполнено равенство:

$$x^2 = y^2 + y^3.$$

Решение. Очевидно, что пара чисел $(0;0)$ удовлетворяет равенству. Пусть $y \neq 0$, тогда равенство можно записать в виде:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = 1 + y. \qquad (1)$$

Так как $1+y$ – целое, то из (1) получаем, что необходимо, чтобы нашлось такое целое число n, что

$$x = n \cdot y. \qquad (2)$$

Подставив (2) в исходное равенство, получаем, что

$$n^2y^2 = y^2 + y^3,$$

откуда:

$$y = n^2 - 1.$$

Следовательно, удовлетворять равенству будут:

$$x = n\cdot(n^2-1),\ y = n^2 - 1,$$

где n – любое целое число. Таким образом,найдено бесконечно много (а значит, не менее, 2025) пар целых чисел x и y, для которых выполнено равенство.

3.Из пункта A в пункт B выехал велосипедист. Одновременно с ним с такой же скоростью из пункта B в пункт A выехал второй велосипедист. Через некоторое время первый велосипедист увеличил скорость на 10 километров в час. Если бы первый велосипедист сразу же двигался с увеличенной скоростью, то его встреча со вторым велосипедистом состоялась бы на три часа раньше. Расстояние AB равно 180 километров. Найдите первоначальную скорость велосипедистов, если в момент изменения скорости первым велосипедистом между ним и вторым велосипедистом было меньше 70 километров и на весь путь из A в B первый велосипедист затратил 15 часов.

Решение. Пусть v– первоначальная скорость велосипедистов;t– время, прошедшее с момента старта до момента изменения скорости первым велосипедистом. Тогда:

$$vt + (v+10)(15-t) = 180.$$

Откуда:

$$3v - 2t = 6. \qquad (1)$$

Возможны два случая.

1 случай. Если встреча произошла не позже момента увеличения скорости первым велосипедистом. Тогда:

$$\frac{180}{2v} - \frac{180}{2v+10} = 3.$$

Откуда:

$$v^2+5v-150=0.$$

Решив последнее уравнение, получаем:

$$\left[\begin{array}{l} v=10, \\ v=-15. \end{array}\right.$$

Значит, $v=10$, и из (1) находим, что $t=12$. В этом случае в момент изменения скорости первым велосипедистом он находился на расстоянии 120 километров от пункта A, а второй – на расстоянии 60 километров от пункта A. Следовательно, расстояние между велосипедистами было 60 километров, и все условия задачи выполнены.

2 случай. Встреча произошла в момент $t_0>t$. Тогда:

$$t+\frac{180-2vt}{2v+10}-\frac{180}{2v+10}=3.$$

Откуда:

$$\frac{vt}{v+5}+3=t. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) получаем систему для определения v и t:

$$\begin{cases} 3v-2t=6, \\ \dfrac{vt}{v+5}+3=t. \end{cases}$$

Откуда:

$$\begin{cases} v=20/3, \\ t=7. \end{cases}$$

В этом случае в момент изменения скорости первым велосипедистом расстояние между велосипедистами было $180-2vt=\dfrac{260}{3}>70$, чего не может быть выполнено по условию.

Ответ: 10.

4. Доказать, что для всех положительных a, b и c выполнено неравенство:

$$(2a^2-a+2)(3b^2+b+3)(4c^2-c+4)\geq 147abc.$$

Решение. Исходное неравенство будет эквивалентно следующим:

$$\frac{2a^2-a+2}{a}\cdot\frac{3b^2+b+3}{b}\cdot\frac{4c^2-c+4}{c}\ge 147,$$

$$(2(a+\frac{1}{a})-1)\cdot(3(b+\frac{1}{b})+1)\cdot(4(c+\frac{1}{c})-1)\ge 147. \qquad (1)$$

Для любого положительного x:

$$x+\frac{1}{x}\ge 2\sqrt{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}=2. \qquad (2)$$

Из (2) следует, что

$$(2(a+\frac{1}{a})-1)\cdot(3(b+\frac{1}{b})+1)\cdot(4(c+\frac{1}{c})-1)\ge(2\cdot 2-1)\cdot(3\cdot 2+1)\cdot(4\cdot 2-1)=147.$$

Таким образом, выполнено неравенство (1) и, следовательно, исходное неравенство.

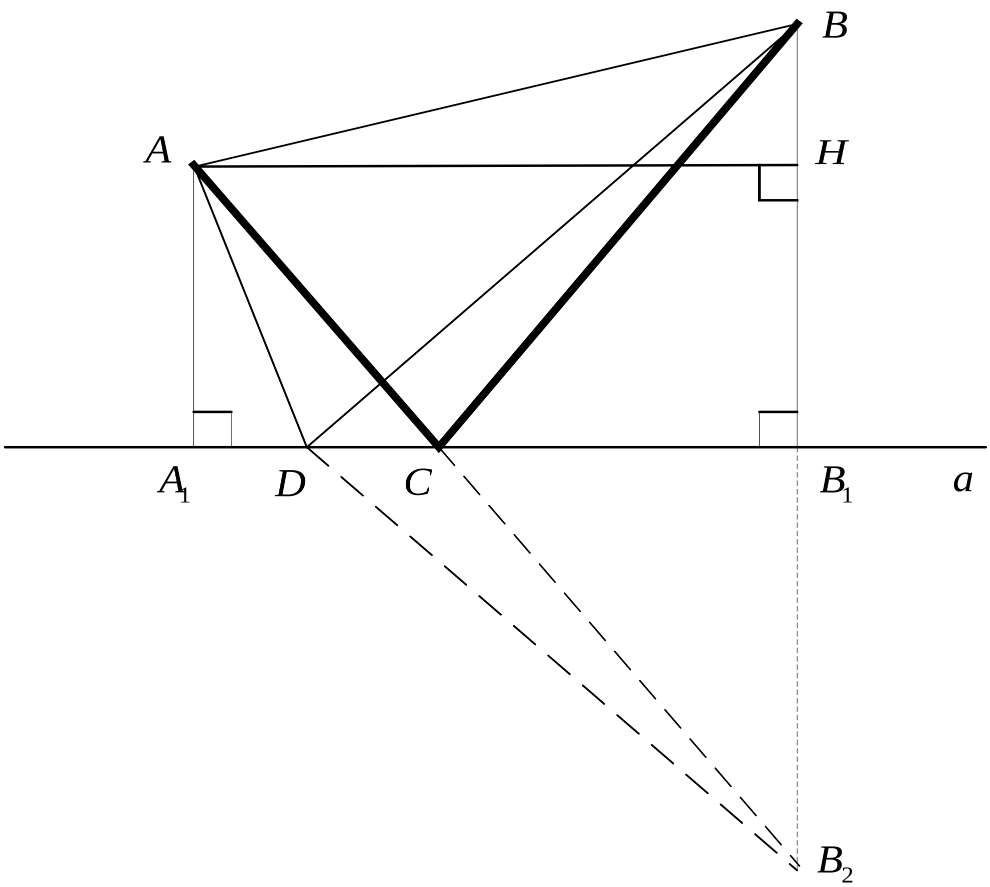
5.В телеигре «Форд Боярд» старец Фура предлагает сыграть участнику в следующую игру. На столе в ряд лежат 57 палочек. Старец Фура и участник игры по очереди берут от одной до пяти палочек. Проигрывает тот, кто взял последнюю палочку. Если первым берёт палочки участник игры, то кто выиграет при выборе правильной стратегии – он или старец Фура? (Опишите и обоснуйте выигрышную стратегию.)

Решение. Число 57 при делении на 6 даёт в остатке 3. Первым ходом участник должен взять 2 палочки. После каждого хода старца Фура участник игры должен брать столько палочек, чтобы в сумме с палочками, которые взял перед этим старец Фура,получилось число 6. Это всегда можно сделать если перед ходом старца Фура на столе не одна палочка (если на столе одна палочка, то выигрывает участник игры). Тогда после каждого хода участника игрына столе будет оставаться количество палочек, которое при делении на 6 даёт в остатке 1. Значит, последняя палочка достанется старцу Фура.

Ответ: выиграет участник игры.

6.По одну сторону реки в своих домиках живут Лёлек и Болек, русло реки прямое. Домик Лёлека и домик Болека находятся на расстоянии 12 и 18 метров от русла реки соответственно, расстояние между домиками – 50 метров. Болекзатеял готовить обед, но у ребят отключили воду. Он позвонилЛёлеку и попросил его принести ведро воды из речки. Опишите, какой маршрут должен избрать Лёлек (по какой траектории двигаться и где зачерпнуть воду), чтобы длина его маршрута была наименьшей. Найдите наименьшую длину маршрута Лёлека. (Обязательно обоснуйте ответ.)

Решение. Так как кратчайшее расстояние между двумя точками плоскости – это отрезок, их соединяющий, то Лёлек должен двигаться по ломаной (из неравенства треугольника). Поскольку длина ломаной больше или равна длине отрезка, соединяющего начало и конец ломаной (из неравенства треугольника), то Лёлек должен двигаться по ломаной, состоящей из двух звеньев: первое звено – от его домика до некоторой точки на реке, второе звено– от этой точки на реке до домика Болека. Пусть прямая a – река; A – домик Лёлека; B – домик Болека; A_1 и B_1 – основания перпендикуляров, опущенных из точек A и B на прямую a; B_2 – точка, симметричная точке B относительно прямой a; C – точка пересечения отрезка A_1B_1 и AB_2; D – произвольная точка на прямой a, отличная от точки C.



Кратчайший путь будет по ломаной ACB. Докажем это.

Прямоугольные треугольники CBB_1 и CB_1B_2, а также прямоугольные треугольники DBB_1 и DB_1B_2 равны по двум катетам. Следовательно,

$$CB = CB_2. \tag{1}$$

$$DB = DB_2. \tag{2}$$

Рассмотрим треугольник ADB_2. Из (1), (2) и неравенства треугольника получаем:

$$AC + CB = AC + CB_2 = AB_2 < AD + DB_2 = AD + DB. \tag{3}$$

Из прямоугольных треугольников AHB и AHB_2 получаем, что

$$\begin{gathered} AB_2{}^2 = (B_1B_2 + B_1H)^2 + AH^2 = (BB_1 + AA_1)^2 + AB^2 - BH^2 = \\ = (BB_1 + AA_1)^2 + AB^2 - (BB_1 - AA_1)^2 = AB^2 + 4 \cdot BB_1 \cdot AA_1 = \\ = 2500 + 4 \cdot 18 \cdot 12 = 2500 + 864 = 3364 = 58^2. \end{gathered} \tag{4}$$

Из (3) и (4) получаем, что наименьшее расстояние, которое пройдёт Лёлек, будет 58.

Ответ: 58.